

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques



IREM de Dijon

MÉLANGES

EN HOMMAGE À PIERRE COLLAUDIN

Décembre 2008

Préface

La présente brochure a été composée par les membres du groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Dijon en rassemblant des études et activités proposées en classe sur des thèmes qui étaient chers à Pierre Collaudin. Pierre nous a quittés en 2003 ; nous avons choisi de publier ces « mélanges » à sa mémoire, à la fois pour que son travail continue à profiter au plus grand nombre et pour témoigner de l'importance de ce qu'il nous a apporté.

Membre fondateur du groupe (et de l'association « Mathématiques en Bourgogne »), il participait activement à tous ses travaux ainsi qu'à ceux de la Commission inter-IREM « Epistémologie et Histoire des Mathématiques » ; professeur et formateur, il était devenu un spécialiste d'Archimède, dont il avait fait le thème central de ses dernières interventions, mais s'intéressait aussi à l'arithmétique, élémentaire ou supérieure, à la géométrie pratique et à de nombreux domaines de l'enseignement des mathématiques. Cette multiplicité des centres d'intérêt se reflète dans les différents articles qui suivent :

- L'arithmétique, avec « Les équations diophantiennes », « La règle des mélanges », « L'arithmétique de Juan de Ortega ».
- Les travaux d'Archimède, avec « Connaître Archimède »,
- La géométrie : « Le point de Fermat-Torricelli », qui contient en annexe quelques pages inédites écrites par Pierre,
- La géométrie pratique, avec « Inscrire un triangle équilatéral dans un carré ».

C'est avec un réel plaisir et une certaine émotion que nous avons travaillé sur ces sujets à la fois pour les contenus traités et à l'idée de faire vivre la mémoire de notre ami ; c'est pourquoi nous dédions cette brochure à Marie-Pascale, à Samuel, Sébastien et Antoine.

Le groupe d'Histoire des Mathématiques

P.S. : Nous adressons de très vifs remerciements à Rémi Langevin pour sa relecture sagace et profonde des articles, qui nous a permis d'améliorer considérablement leur qualité.
Le Comité Scientifique des IREM avait en effet demandé que chaque brochure fasse l'objet d'une relecture ; le choix de Rémi Langevin paraissait judicieux et nous n'avons pas été déçus ! Nous tenons à le remercier sincèrement pour sa patience, sa présence et la stimulation qui en a découlé.

Sommaire

Connaître Archimède
Deux activités en bac pro tertiaire

Patrick GUYOT, LP Dumaine, Mâcon

Avant de raconter en détail les recherches et la séance consacrées à Archimède, nous allons présenter la genèse de cette double activité, en commençant par décrire les élèves, puis la raison principale du choix du thème, et les objectifs visés. On trouvera en annexe le texte complet de l'Arénaire.

1. Les élèves

Le travail engagé ici a été proposé à des élèves de Première baccalauréat professionnel tertiaire du LP Dumaine de Mâcon. Mais en raison de contraintes à la fois pédagogiques et matérielles, une classe a travaillé sur la première partie, une autre classe sur la deuxième partie.

La recherche concernant le personnage d'Archimède a été confiée à vingt-sept élèves de baccalauréat professionnel secrétariat et comptabilité, alors que les questions issues de la lecture partielle de l'*Arénaire* ont été posées à dix-huit élèves de baccalauréat professionnel commerce.

2. Le choix du thème

Archimède fut certainement le scientifique de prédilection de Pierre Collaudin, qu'il avait lu, approfondi, et sur lequel il a produit plusieurs travaux et articles dans la Feuille de Vigne bourguignonne et ailleurs. Cet investissement important nous a conduits naturellement à envisager de proposer un article consacré à Archimède, ce qui est fait ici.

3. Les objectifs

Les contenus scientifiques rencontrés dans l'œuvre d'Archimède présentent un caractère de difficulté tel qu'il les rend inadaptés à nos élèves ; un tri s'est rapidement fait, par éliminations successives. Une seconde contrainte a ensuite guidé nos choix : les sections de baccalauréat professionnel tertiaire n'ont ni physique ni géométrie à leur programme, ce qui élimine la plupart des travaux de notre auteur. Le sujet de l'*Arénaire* s'est donc vite imposé.

Mais une autre idée est progressivement apparue. Le programme officiel de mathématiques insiste sur plusieurs capacités transversales à privilégier. Voici les consignes plus particulièrement concernées :

- développer les capacités de communication, qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes).

- les travaux individuels de rédaction (mise au propre d'exercices résolus en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte, éventuellement rapport de stage, ...) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite.

- l'exploitation de documents, individuelle ou en équipe, peut contribuer notamment au développement des capacités d'organisation et d'expression écrite (rédaction de rapport) ou orale (mise au point d'un exposé).
(Programme de mathématiques en baccalauréat professionnel, Arrêté du 9-5-1995. JO du 17-5-1995)

À peu près à la période où se déroulait la réflexion décrite ici, j'avais évoqué le nom d'Archimède lors d'une leçon de sciences consacrée à la statique des fluides avec des élèves de terminale BEP Métiers de la Mode et des Industries Connexes, et leur manque (voire leur absence totale) d'information sur le personnage d'Archimède m'a convaincu d'aborder ce thème avec mes élèves de première bac sous un angle adapté aux objectifs cités plus haut.

4. Première activité : recherche documentaire et synthèse d'informations.

a) Le travail demandé

A partir des éléments décrits au paragraphe 3, j'ai donc demandé aux élèves d'effectuer un travail de recherche personnelle avec des consignes précises :

Enquête sur Archimède

Rechercher sur Internet ou sur une encyclopédie des informations sur ce savant.

Parmi les renseignements collectés extraire en dix lignes environ les informations qui vous semblent importantes pour caractériser ce personnage et son œuvre.

Il est facile de constater que la tâche proposée n'est pas des plus simples. Il suffit pour s'en convaincre de demander sur un moteur de recherches comme *Google* une investigation à partir du mot **Archimède**. On obtient une liste de 2 070 000 sites, j'avais suggéré aux élèves une variante éventuelle en tapant **Archimedes**, dénomination anglaise du savant grec, 3 560 000 sites sont proposées ; et si on souhaite avoir une image à partir des mêmes noms, on obtient respectivement 30 800 et 38 700 images. L'adage selon lequel « trop d'informations tue l'information » semble bien d'actualité ici, les résultats obtenus confirmant bien les difficultés prévisibles. Les élèves ont bien entendu tous choisis Internet plutôt qu'une Encyclopédie, et ouvert les trois ou quatre premières adresses proposées sans aller plus loin.

b) Dépouillement des productions des élèves

Les vingt-sept élèves de la première classe ont rendu une copie. Pour les deux tiers d'entre eux, les informations ont été fournies sur un document tapé à l'ordinateur, huit élèves ayant écrit une ou plusieurs feuilles manuscrites. Cela est peut-être dû à l'attirance irrésistible des jeunes vers les « copier-coller » qu'on retrouve dans tous les logiciels qu'ils utilisent. C'est en tout cas ce qui s'est produit avec quelques copies heureusement minoritaires (trois) qui reproduisent dans leur intégralité un document obtenu sur internet, mais on constate aussi que des paragraphes entiers simplement transférés d'un site internet apparaissent sur une dizaine de comptes rendus.

La première remarque concerne la demande des « dix lignes environ ». Elle n'a été respectée que par une dizaine d'élèves, les autres ont plus tard justifié le fait qu'ils ont écrit beaucoup plus de lignes (jusqu'à douze pages pour une élève) soit parce qu'il leur était difficile ou impossible (trop « fatigant » d'après quelques uns) de sélectionner ce qui devait être mis en avant parmi les travaux et découvertes d'Archimède, soit parce qu'ils croyaient bien faire en fournissant beaucoup plus d'informations que ce qui était demandé, la quantité étant gage de qualité pour ces derniers. Il y aura donc une remédiation en classe au sujet du respect des consignes.

Certaines informations se retrouvent dans la majorité des copies, nous les évoquerons en premier, et par ordre de fréquence décroissante. Tout d'abord les dates et lieux de naissance et de mort d'Archimède (23), la Poussée d'Archimède (sans obligatoirement l'énoncer, 20), le pays d'origine (Grèce, 17), le principe du levier (15, non détaillé pour 5 d'entre eux), les conditions de sa mort (tué par un soldat romain à Syracuse, 15), le nom et la profession de son père (Phydias ou Phidias ou Phydius, astronome, 13), la vis sans fin (12), et son statut d'ingénieur (12).

Il est affublé par la quasi-totalité des élèves de superlatifs tous plus impressionnants les uns que les autres parmi lesquels nous retiendrons : brillant théoricien ; œuvre scientifique considérable ; le plus grand savant de l'Antiquité ; le créateur de la physique mathématique ; formidable mathématicien ; fondateur de la statique ; géomètre de grande envergure ; savant excellent ; brillant physicien ; le père de l'hydrostatique ; grand scientifique ; le plus célèbre savant grec.

En ce qui concerne ses travaux de physique et de mécanique, en exceptant la Poussée d'Archimède et la vis sans fin évoquées plus haut, on s'y attarde peu. Un seul élève raconte de façon détaillée le siège de Syracuse et les machines utilisées pour lutter contre la flotte romaine. Les réponses sont par contre beaucoup plus bavardes dans le domaine des mathématiques. Ceci est en partie dû au fait que le travail était à rendre au professeur de mathématiques, et qu'il s'agissait, peut-être même inconsciemment, de lui faire plaisir, ou tout au moins de traiter en profondeur ce qui relevait de son domaine.

Les élèves citent le plus fréquemment le calcul approché de π (19), mais aussi le calcul de l'aire du segment de parabole, ou d'un secteur de spirale, ou l'aire et le volume du cylindre et de la sphère (17), les paraboloïdes ou les ellipsoïdes (16), la spirale d'Archimède (12). Ce ne sont que des évocations, aucun n'essayant d'expliquer l'un ou l'autre de ce qui ne constitue pour eux que des termes vides de sens, comme j'ai pu le vérifier lors d'un questionnement ultérieur, même pour ceux qui développent quelques contenus mathématiques. 13 élèves nomment la méthode d'exhaustion et 3 la méthode de démonstration par l'absurde. Pour terminer sur ce sujet et anticiper sur la deuxième partie de ce travail, 8 élèves ont parlé (souvent sans le citer) de l'*Arénaire* ; un élève par exemple écrit qu'Archimède « chercha le nombre de tous les grains de sable de l'univers ».

Il faut également signaler les trois termes et phrases célèbres qui sont retenus : « donnez-moi un point d'appui (pour quelques élèves *un levier*) et je soulèverai le monde » (19), le fameux *eurêka*

(18), et l'énoncé complet du principe d'Archimède en hydrostatique (11), présenté par la plupart de manière traditionnelle : « Tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé. »

On ne peut pas faire l'économie des « perles » qui se retrouvent souvent dans les copies des élèves. Non pour se moquer, même si un nombre important parmi les professeurs sont friands de cette prose scolaire, mais aussi pour montrer que la volonté de comprendre ce qu'on écrit n'est pas toujours présente. A leur décharge, on pourra dire que ceci prouve que les élèves ne sont pas tous des adeptes du « copier-coller ». Citons entre autres quelques phrases :

Archimède fut le fondateur de la statistique des solides.
Il décède lors de l'évasion de Syracuse.
Il avait appris le calcul intégral.
Il est l'inventeur de la poussée d'Archimède.

Nous faisons un bilan plutôt positif de cette recherche. Tout d'abord les élèves ont travaillé avec beaucoup de bonne volonté, ont fourni une présentation de qualité, les documents étaient souvent accompagnés d'images représentant Archimède ou certaines de ses machines, et bien mis en page. Les contenus étaient souvent riches, mais mal exploités et surtout souvent sans même une tentative d'explication. Sept ou huit élèves se limitent à un listing de titres non développés. Nous nous sommes arrêtés là avec cette classe et avons poursuivi avec une autre classe à qui a été confiée une étude autour de l'*Arénaire*.

5. Deuxième activité : l'Arénaire et les grands nombres.

a) Première partie : étude préliminaire

Une présentation préalable rapide des systèmes de numération a été effectuée en classe. Sans entrer trop loin dans les détails il est utile d'expliquer que la Grèce antique a utilisé plusieurs systèmes de numération, certains simultanément. Le système décimal y est utilisé, et pour lire un nombre il suffit d'additionner les signes inscrits.

Prenons l'exemple du système dit « acrophonique » en usage à partir du VIème siècle av-JC. Les signes utilisés pour 1, 10, 100, et 1 000 sont respectivement I, Δ, H et X. Le nombre 1 324 s'écrit donc XHHHΔΔIIII. L'écriture est facile à effectuer, puisqu'il suffit de mettre les symboles côte à côte, mais ne permet pas de réaliser des opérations simplement comme avec notre écriture décimale positionnelle. De plus le symbole du plus grand nombre étant M, la myriade, égale à 10 000 ; on perçoit alors les difficultés rencontrées pour écrire de très grands nombres.

Avant de faire lire aux élèves une partie de l'ouvrage d'Archimède, je leur ai proposé de réfléchir à l'écriture des nombres entiers, à l'aide des chiffres, ou de mots. Ils ont eu à répondre aux questions du document suivant.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 1

L'*arénaire* (mot de la même famille qu'arène, issu du latin arena, qui signifie sable ; signalons qu'en grec on employait comme titre le mot *psammite*, provenant de *psammos*, sable) est un livre du grec Archimède (287 av JC ; 212 av JC) dans lequel il présente un système de numération qu'il a inventé. Avant lui les Grecs utilisaient des nombres avec une écriture complexe faite de lettres. La lettre correspondant au plus grand nombre est M, symbole de la myriade égale à dix mille.

Avant d'étudier une partie du texte de l'arénaire, répondez à quelques questions.

1) Écrire une myriade en chiffres, puis sous forme d'une puissance de dix.

2) Écrire une myriade de myriades en chiffres, puis sous forme d'une puissance de dix. Ce nombre est le plus grand qu'on savait écrire à l'époque d'Archimède.

3) Écrire en toutes lettres le nombre 999999999.

4) Vingt-cinq mots de la langue française suffisent pour nommer tous les nombres de 1 jusqu'à 999 999 999 999. Écrire ces vingt-cinq mots.

Commentaire de la partie 1

Les deux premières questions n'ont pas posé de problème. Mais une réponse à la troisième question n'a pas été obtenue facilement, une des difficultés provenant de l'écriture proposée dans l'énoncé, car le nombre n'avait pas été écrit avec un intervalle tous les trois chiffres. Il a fallu proposer aux élèves de réécrire le nombre en plaçant des espaces, ce qui a facilité la lecture.
La quatrième question a également montré que les élèves ne manipulent pas facilement le passage de l'écriture-chiffres à l'écriture-mots, et il a été nécessaire de leur demander d'écrire préalablement les mots correspondants aux nombres entiers classés dans l'ordre croissant.

b) <u>Deuxième partie</u> : lecture et intérêt de l'ouvrage.

La discussion autour de l'écriture des nombres terminée, le document ci-dessous a été distribué aux élèves.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec.

Partie 2

Le texte donné ci-dessous a été écrit par Archimède. Ce savant a écrit ses livres en grec ancien, ils ont été traduits en plusieurs langues au cours des siècles. Parmi plusieurs traductions existant en français, celle que nous fournissons a été réalisée vers 1920 par monsieur Paul Ver Eecke (l'édition utilisée ici est publiée à Paris en 1960 chez Albert Blanchard). Archimède s'adresse dans son livre l'*Arénaire* à Gélon, roi de Syracuse, en Sicile. Son objectif est de dénombrer les grains de sable contenus dans le Monde.

> *D'aucuns pensent, roi Gélon, que le nombre des grains de sable est infiniment grand. […] D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Cependant, si ceux qui pensent ainsi se représentaient un volume de sable équivalent au volume de la terre, en supposant toutes les mers et les vallées de la terre remplies jusqu'au niveau des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils comprendraient encore beaucoup moins que l'on puisse énoncer un nombre surpassant une pareille multitude de grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir […] que certains nombres […] surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, remplie de la manière que nous avons dite, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.*

1. Quel est selon vous l'avis d'Archimède sur le nombre de grains de sable : fini ou infini ? Donnez les arguments avancés par l'auteur.

2. Quel est votre avis personnel ? Expliquez.

<u>Commentaire de la partie 2</u>

La plupart des élèves ont compris l'essentiel de ce qu'a voulu dire Archimède, en traduisant que les Grecs ne sont pas capables d'écrire ce nombre de grains, même s'ils pensent qu'il n'est pas infini. Lui, Archimède, sait que sa méthode permettra d'écrire ce nombre, et d'autres encore beaucoup plus grands.

Quant à leur avis personnel, il est très varié, depuis les élèves (7) qui ne savent pas, jusqu'à ceux (10) qui sont en accord avec l'auteur (« c'est un nombre fini très grand »). Quelques commentaires intéressants ont été relevés, à l'origine de discussions qui ont suivi :

L'infini n'existe pas
L'infini c'est abstrait, c'est théorique
Un nombre est toujours fini, même très grand

Après un débat d'une dizaine de minutes, j'ai distribué le texte suivant avec la consigne de lire les questions et de proposer des réponses pour la semaine suivante.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 3

La suite du texte consiste à définir ce qu'est le monde pour les Grecs du troisième siècle avant Jésus-Christ. À l'époque on pensait que le Monde avait la forme d'une sphère dont le centre était la Terre. Aristarque, contemporain d'Archimède, proposait comme Monde une sphère centrée sur le Soleil. Ces dernières dimensions étant les plus grandes, ce sont celles que va utiliser Archimède. Afin d'évaluer le nombre de grains de sable, il explique son système de numération.

> *On s'entend sur les noms qui nous ont été transmis pour les nombres allant jusqu'à dix mille, et l'on distingue suffisamment les myriades en énonçant leurs nombres jusqu'à dix mille myriades. Dès lors, appelons primes les nombres en question jusqu'à dix mille myriades ; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades des nombres primes, et comptons les unités des nombres seconds, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons de nouveau unité des nombres troisièmes dix mille myriades des nombres seconds, et comptons les unités des nombres troisièmes, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons, de même, unité des nombres quatrièmes dix mille myriades des nombres troisièmes, unité des nombres cinquièmes dix mille myriades des nombres quatrièmes, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de dix mille myriades.*

1. Écrire dix mille myriades sous forme d'une puissance de 10.

2. Écrire l'unité des nombres seconds sous forme d'une puissance de 10.

3. Continuer jusqu'à l'unité des nombres huitièmes.

Archimède poursuit ensuite sa présentation beaucoup plus loin, en prolongeant son raisonnement, mais nous pouvons en rester là pour donner la réponse à sa question concernant les grains de sable.

Commentaire de la partie 3

Les élèves un peu désarçonnés au début par cette écriture ont eu une remarque générale pour dire que les choses étaient bien compliquées à cette époque, et que les techniques dont on dispose

aujourd'hui pour écrire les nombres sont nettement plus performantes. Les résultats obtenus ont dans l'ensemble été corrects, mais l'entraide a certainement fonctionné. Nous avons également discuté du géocentrisme et de l'héliocentrisme.

Un dernier document a été donné, concernant une propriété des puissances de 10, afin de souligner encore plus l'intérêt des écritures modernes, et pour finir le résultat obtenu par Archimède a été énoncé.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 4

Archimède énonce une propriété importante concernant des nombres « en proportion continue », nous disons aujourd'hui « formant une suite géométrique ».

> *Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.*

Retrouvez dans ce texte la formule du produit des puissances d'un même nombre (prendre l'exemple de puissances de dix).

Archimède conclut son ouvrage sur le résultat suivant :

> *Il est clair que la quantité des grains de sable dont le volume égalerait la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est inférieure à mille myriades des nombres huitièmes.*

Écrivez mille myriades des nombres huitièmes en puissance de dix.

Commentaire de la partie 4

Les lecteurs auront deviné que là encore les élèves ont été surpris par la formulation, et chacun, après avoir bataillé pour « faire coller » la formule demandée avec le texte, remarque l'intérêt de nos écritures modernes et symboliques, permettant d'éviter de tout dire avec des mots.

Après le travail préliminaire de la partie 3, les élèves n'ont pas eu de difficulté pour répondre à la question finale.

6. Conclusion

Deux activités très différentes ont été présentées dans cet article, l'une sur une recherche d'informations et une synthèse à fournir, l'autre sur la compréhension d'un texte.

L'*Arénaire* qui a été perçu comme « daté » par les élèves, et parfois obscur, a néanmoins permis de faire le point sur des connaissances pas toujours très précises sur les écritures des nombres, les calculs des puissances de 10, les propriétés de ces puissances, mais aussi sur des questions plus générales et inhabituelles pour eux, comme le statut de l'infini, l'héliocentrisme.

La recherche sur Internet, et le compte rendu qui a suivi, ont mis en évidence les dérives qui peuvent se produire lors de telles recherches, et permis d'aider les élèves à prendre conscience de la difficulté causée par l'excès de données, et la nécessité d'être rigoureux même dans un résumé qui ne semble a priori pas poser de problème.

Nous donnons en annexe le texte intégral de l'*Arénaire*.

Archimède. *L'arénaire*, **in *Les Œuvres Complètes d'Archimède,* traduites du grec en français avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke, librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1960.**

D'aucuns pensent, roi Gélon, que le nombre des grains de sable est infiniment grand ; et ils visent ainsi, non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui gît dans toute contrée habitée ou inhabitable. D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Cependant, si ceux qui pensent ainsi se représentaient un volume de sable équivalent au volume de la terre, en supposant toutes les mers et les vallées de la terre remplies jusqu'au niveau des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils comprendraient encore beaucoup moins que l'on puisse énoncer un nombre surpassant une pareille multitude de grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir, au moyen de démonstrations géométriques dont tu pourras suivre les raisonnements, que certains nombres, que j'ai, moi-même, exprimés et exposés dans des écrits adressés à Zeuxippe, surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, remplie de la manière que nous avons dite, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.

Tu auras retenu que le monde est le nom donné par la plupart des astronomes à la sphère dont le centre est le centre de la terre, et dont le rayon est égal à la droite située entre le centre du soleil et le centre de la terre ; car tu as appris cela dans les dissertations publiées à ce sujet par les astronomes. Or, Aristarque de Samos a, dans ses écrits, émis certaines hypothèses dont les arguments feraient admettre que le monde est beaucoup plus étendu qu'on ne l'avait dit jusqu'à présent. En effet, il suppose que les étoiles fixes et le soleil demeurent immobiles, que la terre tourne suivant une circonférence de cercle autour du soleil, qui est situé au milieu de l'orbite de la terre, et qu'enfin, la grandeur de la sphère des étoiles fixes, disposée autour du même centre que celui du soleil, est telle que le cercle, à la circonférence duquel on suppose que la terre évolue, a le même rapport avec la distance des étoiles fixes que le centre d'une sphère avec sa surface. Mais, il est évident que ceci est impossible ; car le centre d'une sphère n'ayant aucune grandeur, on ne peut admettre qu'il ait quelque rapport avec la surface de cette sphère. On peut néanmoins croire qu'Aristarque imagine que, si l'on considère la terre comme le centre du monde, le rapport de la terre avec ce que nous appelons le monde est le même que celui de la sphère, contenant le cercle autour duquel on suppose que la terre évolue, avec la sphère des étoiles fixes. C'est, en effet, d'une telle conception des apparences qu'il fait dépendre ses démonstrations, et il semble principalement supposer que la grandeur de la sphère, dans laquelle il imagine que la terre se meut, est égale à celle que nous appelons le monde.

Dès lors, je dis que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, on démontrerait, moyennant les données qui vont suivre, que, parmi les nombres, de l'expression desquels il a été question plus haut, certains surpasseraient le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui d'une pareille sphère.

Admettons d'abord que le périmètre de la terre ait une longueur de trois cents myriades de stades, et pas davantage. Il est vrai que d'autres, comme tu le sais, ont tenté de démontrer que cette longueur est de trente myriades de stades ; mais moi, allant plus loin, et regardant cette dimension de la terre admise par mes devanciers comme étant environ dix fois plus grande, je suppose que son périmètre est à peu près de trois cents myriades de stades, mais pas davantage.

Je pose ensuite que le diamètre de la terre est plus grand que celui de la lune, et que le diamètre du soleil est plus grand que celui de la terre ; ce qui est conforme à ce que la plupart des astronomes antérieurs ont admis. Je suppose encore que le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, mais pas davantage ; bien que, parmi les astronomes qui nous ont précédés, Eudoxe ait déclaré qu'il était neuf fois aussi grand, Phidias, mon père, douze fois aussi grand, et qu'Aristarque ait essayé de démontrer que le diamètre du soleil était plus grand que dix-huit fois et plus petit que vingt fois le diamètre de la lune. Or, moi, je vais même au-delà de ce dernier, et, afin que ma proposition soit démontrée sans contestation, je suppose que le diamètre du soleil est à peu près égal à trente fois le diamètre de la lune, mais pas davantage. Je suppose, en

outre, que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde. Je suppose cela, étant donné qu'Aristarque aurait trouvé que le soleil nous apparaît comme étant à peu près le sept cent vingtième du cercle du zodiaque, et que, moi-même, j'ai tâché de prendre l'angle qui embrasse le soleil, et a son sommet à l'œil, en le recherchant, au moyen d'instruments, de la manière suivante.

Toutefois, cet angle n'est pas aisé à prendre avec précision, parce que, ni la vue, ni les mains, ni les instruments qui sont nécessaires pour le prendre ne sont assez sûrs pour nous le faire connaître exactement. Mais, c'est une chose au sujet de laquelle il n'est guère opportun de discourir davantage pour le moment ; car elle a été souvent signalée. Au reste, pour démontrer ma proposition, il me suffit de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil ; puis de prendre un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil. Ayant donc établi une longue règle sur un socle vertical, je l'ai disposée en un lieu d'où l'on peut voir le soleil .à son lever. Aussitôt après le lever du soleil, j'ai posé verticalement sur la règle un petit cylindre fait au tour. Lorsque le soleil fut à l'horizon, et que les yeux purent le regarder en face, après avoir dirigé la règle vers le soleil, j'ai mis l'œil à son extrémité, tandis que le cylindre posé entre le soleil et l'œil cachait entièrement le soleil. Dès lors, j'ai déplacé peu à peu le cylindre par rapport à l'œil jusqu'à ce que, le soleil commençant à se montrer légèrement de chaque côté du cylindre, ce dernier fût fixé en place. Si l'œil voyait réellement d'un point unique, en menant de l'extrémité de la règle, où l'œil est posé, des droites tangentes au cylindre, l'angle compris sous ces droites serait plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil, parce que l'on verrait quelque peu du soleil de chaque côté du cylindre. Or, comme les yeux ne voient pas d'un point unique, mais sous une certaine dimension, j'ai choisi une dimension cylindrique telle qu'elle ne soit pas inférieure à celle de la vision. Cette dimension étant disposée à l'extrémité de la règle où se trouve l'œil, et, des droites étant menées, tangentes à la fois à cette dimension et au cylindre, l'angle compris sous ces droites était donc plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil.

Une dimension non inférieure à celle de la vision se trouve d'ailleurs de la manière suivante : on prend deux minces cylindres de même épaisseur, l'un blanc, mais l'autre pas ; on les place devant l'œil de telle sorte que le blanc en soit éloigné, et que celui qui n'est pas blanc soit rapproché de l'œil jusqu'à toucher le visage. Dès lors, si les cylindres choisis sont moins larges que la vision, le cylindre le plus rapproché est embrassé par l'œil qui aperçoit le blanc derrière le premier ; si les cylindres sont beaucoup moins larges, le blanc est vu en entier, et, s'ils ne sont pas beaucoup moins larges, on aperçoit une certaine partie du blanc de chaque côté de celui qui est le plus rapproché de l'œil. On prend d'ailleurs des cylindres d'une largeur convenable pour que l'un cache l'autre, sans cependant cacher un espace plus grand, et il est donc certain que la dimension en grosseur des cylindres qui se présentent ainsi n'est pas inférieure à celle de la vision.

L'angle plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil est pris de la manière suivante : le cylindre est éloigné de l'œil, sur la règle, de façon à ce qu'il cache entièrement le soleil, et, des droites étant menées de l'extrémité de la règle où est placé l'œil, tangentiellement au cylindre, l'angle compris sous les droites menées ainsi n'est pas plus petit que l'angle qui embrasse le soleil en ayant son sommet à l'œil.

Les angles relevés de cette manière ayant été mesurés avec l'angle droit, l'angle qui aboutit au point de repère a été trouvé plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et le plus petit angle a été trouvé plus grand que la deux centième partie de l'angle droit. Il en résulte évidemment que l'angle qui embrasse le soleil, en ayant son sommet à l'œil, est aussi plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et plus grand que la deux centième partie de l'angle droit.

Ces choses étant établies, je vais démontrer que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde.

En effet, imaginons un plan passant à la fois par le centre du soleil, le centre de la terre, et par l'œil, au moment où le soleil est un peu au-dessus de l'horizon ; le plan ainsi mené coupe le monde suivant le cercle ΑΒΓ, la terre suivant le cercle ΔΕΖ, et le soleil suivant le cercle ΣΗ. Soit Θ

le centre de la terre, K celui du soleil, et soit Δ l'œil. Menons des tangentes au cercle ΣΗ : du point Δ les tangentes ΔΛ, ΔΞ, en N et en T ; du point Θ les tangentes ΘΜ, ΘΟ, en X et en P ; et que les droites ΘΜ, ΘΟ coupent le cercle ΑΒΓ aux points A et B.

Dès lors, puisque l'on a supposé le soleil au-dessus de l'horizon, la droite ΘK sera plus grande que la droite ΔK ; donc, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ sera plus grand que l'angle compris sous les droites ΘΜ, ΘΟ. Or, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, et plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit ; car il est égal à l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΘΜ, ΘΟ est plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et la droite AB est plus petite que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ΑΒΓ divisé en 656 parties. Mais, le rapport du périmètre du polygone, dont il a été question, au rayon du cercle ΑΒΓ est plus petit que celui de 44 à 7, parce que le rapport du périmètre de tout polygone inscrit dans un cercle au rayon est plus petit que celui de 44 à 7. Tu sais, d'ailleurs, que j'ai démontré que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre augmenté de moins de la septième partie de ce diamètre, et que le périmètre du polygone inscrit est plus petit que cette circonférence. En conséquence, le rapport de la droite BA à la droite ΘK est plus petit que le rapport de 11 à 1148, et il s'ensuit que la droite BA est plus petite que la centième partie de la droite ΘK. Or, le diamètre du cercle ΣΗ est égal à la droite BA, parce que sa moitié, c'est-à-dire la droite ΦΑ, est égale à la droite KP ; car les droites ΘK, ΘΑ étant égales, des perpendiculaires opposées au même angle ont été menées de leurs extrémités. Donc, il est évident que le diamètre du cercle ΣΗ est plus petit que la centième partie de la droite ΘK. Or, le diamètre ΕΘΥ est plus petit que le diamètre du cercle ΣΗ, parce que le cercle ΔΕΖ est plus petit que le cercle ΣΗ ; par conséquent, la somme des droites ΘΥ et ΚΣ est plus petite que la centième partie de la droite ΘK, et il en résulte que le rapport de la droite ΘK à la droite ΥΣ est plus petit que celui de 100 à 99. De plus, puisque la droite ΘK n'est pas plus petite que la droite ΘΡ, et que la droite ΣΥ est plus petite que la droite ΔΤ, le rapport de la droite ΘΡ à la droite ΔΤ sera donc plus petit que celui de 100 à 99. D'autre part, puisque, dans les triangles rectangles ΘΚΡ, ΔΚΤ, les côtés ΚΡ, ΚΤ sont égaux, que les côtés ΘΡ, ΔΤ sont inégaux, et que le côté ΘΡ est le plus grand, le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΤ, ΔΚ à l'angle compris sous les droites ΘΡ, ΘΚ est plus grand que le rapport de la droite ΘΚ à la droite ΔΚ, mais plus petit que celui de la droite ΘΡ à la droite ΔΤ. En effet, si les côtés adjacents à l'angle droit de deux triangles rectangles sont, les uns égaux et les autres inégaux, le rapport du plus grand au plus petit des angles compris sous les côtés inégaux est plus grand que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites opposées à l'angle droit, mais il est plus petit que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites adjacentes à l'angle droit. Dès lors, le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘΟ et ΘΜ est plus petit que le rapport de la droite ΘΡ à la droite ΔΤ, plus petit, lui-même, que le rapport de 100 à 99 ; en sorte que le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘΜ, ΘΟ est aussi plus petit que celui de 100 à 99. De plus, puisque l'angle compris sous les droites ΔΛ et ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, l'angle compris sous les droites ΘΜ et ΘΟ sera plus grand que les quatre-vingt-dix-neuf vingt millièmes de l'angle droit ; en sorte que cet angle sera plus grand que la deux cent troisième partie de l'angle droit. Dès lors, la droite BA est plus grande que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ΑΒΓ divisée en huit cent douze parties. Or, le diamètre du soleil est égal à la droite AB ; donc, il est évident que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone.

Ces choses étant admises, on peut démontrer aussi que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, et que, de plus, le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

En effet, puisque l'on a supposé que le diamètre du soleil n'est pas plus grand que trente fois le diamètre de la lune, et que le diamètre de la terre est plus grand que le diamètre de la lune, il est évident que le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre. D'autre part,

puisque l'on a démontré que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde, il est clair que le périmètre du chiliagone en question est plus petit que mille fois le diamètre du soleil. Or, le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre ; donc, le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre. Dès lors, puisque le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre, tandis qu'il est plus grand que trois fois le diamètre du monde ; car on t'a démontré que le diamètre de tout cercle est plus petit que le tiers du périmètre de tout polygone inscrit dans ce cercle ayant les côtés égaux et plus de six angles ; il en résulte que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre. Dès lors, il est démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre. D'autre part, il est évident, d'après ce qui va suivre, que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

En effet, puisque l'on a supposé que le périmètre de la terre n'est pas plus grand que trois cents myriades de stades, et, comme le périmètre de la terre est plus grand que le triple de son diamètre, parce que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre, il est évident que le diamètre de la terre est plus petit que cent myriades de stades. Donc, puisque le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, il est évident que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

Telles sont les choses que j'admets au sujet des grandeurs et des distances, et voici maintenant pour ce qui concerne le sable : Si l'on rassemble un volume de sable non supérieur à une graine de pavot, le nombre des grains de sable ne dépassera pas dix mille, tandis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas inférieur à un quarantième de doigt. Ces données ont d'ailleurs été relevées de la manière suivante : Des graines de pavot ayant été déposées en ligne droite sur une règle polie, de manière à se toucher l'une l'autre, vingt-cinq de ces graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Dès lors, j'adopte pour la graine de pavot un diamètre plus petit, que je suppose être environ le quarantième d'un doigt, mais pas moins ; car, pour ceci, je désire également démontrer ma proposition sans aucune contestation.

Voilà donc les choses que j'admets. Cependant, je crois utile de parler de la dénomination des nombres, afin que, s'il n'en était pas question dans le présent livre, on ne soit pas dérouté au sujet d'autres nombres encore qu'on ne trouvera pas dans le livre que j'ai écrit pour Zeuxippe.

On s'entend sur les noms qui nous ont été transmis pour les nombres allant jusqu'à dix mille, et l'on distingue suffisamment les myriades en énonçant leurs nombres jusqu'à dix mille myriades. Dès lors, appelons primes les nombres en question jusqu'à dix mille myriades; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades des nombres primes, et comptons les unités des nombres seconds, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons de nouveau unité des nombres troisièmes dix mille myriades des nombres seconds, et comptons les unités des nombres troisièmes, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons, de même, unité des nombres quatrièmes dix mille myriades des nombres troisièmes, unité des nombres cinquièmes dix mille myriades des nombres quatrièmes, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de dix mille myriades.

Bien que la connaissance de ces nombres soit suffisante pour la chose qui nous occupe, on peut aller encore plus loin. En effet, appelons nombres de la première période ceux que nous avons énoncés jusqu'ici, et appelons unité des nombres primes de la seconde période le dernier nombre de la première période. Appelons, de même, unité des nombres seconds de la seconde période dix mille myriades des nombres primes de la seconde période ; appelons, de même, unité des nombres troisièmes de la seconde période le dernier des nombres précédents, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs de la seconde période jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades. Appelons encore, de même, unité des nombres primes de la troisième période le dernier nombre de la seconde période, et, ainsi de suite, les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades de la dix mille myriadième période.

Les nombres étant dénommés de cette manière, si des nombres en proportion continue sont disposés par ordre à partir de l'unité, et, si le nombre qui suit l'unité est dix, les huit premiers, y compris l'unité, feront partie de ceux qui sont nommés nombres primes, les huit suivants feront partie de ceux qui sont nommés seconds, et les autres feront, de même, partie de ceux qui sont appelés du nom même du rang de leur octade de nombres à partir de la première octade de nombres. Il en résulte que le huitième nombre de la première octade de nombres est mille myriades, et que le premier nombre de la seconde- octade, puisqu'il est décuple de celui qui le précède, sera dix mille myriades. Ce dernier nombre est d'ailleurs l'unité des nombres seconds, tandis que le huitième nombre de la seconde octade sera mille myriades des nombres seconds. Le premier nombre de la troisième octade sera de nouveau dix mille myriades des nombres seconds, parce qu'il est décuple de celui qui le précède. Ce dernier nombre est d'ailleurs l'unité des nombres troisièmes, et il est évident que, pour une octade quelconque, il en sera comme nous venons de. le dire.

Il est encore utile de connaître ce qui sui t: Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.

Soient donc des nombres tels que Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ en proportion continue à partir de l'unité. Soit Α l'unité ; multiplions Δ par Θ, et soit Χ leur produit. Prenons, dans la progression, Λ aussi éloigné de Θ que Δ est éloigné de l'unité. On doit démontrer que Χ est égal à Λ. En effet, puisque, parmi les nombres proportionnels, Δ est éloigné de Α comme Λ est éloigné de Θ, le rapport de Δ à Α est le même que celui de Λ à Θ. Mais, Δ est le produit de Δ par Α ; donc, Λ est le produit de Θ par Δ, et, des lors, Κ est égal à Χ. Il est donc évident que le produit fait partie de la progression, et qu'il est aussi éloigné du plus grand des nombres multipliés entre eux que le plus petit est éloigné de l'unité. De plus, il est clair que ce produit est éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont Δ et Θ sont éloignés de l'unité ; car Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ sont les nombres dont Θ est distancé à partir de l'unité, et Ι, Κ, Λ sont, à un nombre près, ceux dont Δ est distancé à partir de l'unité. Or, en ajoutant Θ, on a la somme de ces nombres.

De toutes les choses qui précèdent, les unes étant admises et les autres étant démontrées, je vais démontrer ma proposition.

En effet, puisque l'on a admis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas plus petit que le quarantième d'un doigt, il est évident qu'une sphère du diamètre d'un doigt n'est pas plus grande que pour contenir soixante-quatre mille graines de pavot ; car c'est de ce dernier nombre qu'elle est un multiple de la sphère du diamètre d'un quarantième de doigt ; d'autant plus que l'on t'a démontré que les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres. Or, comme on a supposé, en outre, que le nombre des grains de sable contenus dans le volume d'une graine de pavot n'est pas supérieur à dix mille, il est évident que, si une sphère du diamètre d'un doigt est remplie de sable, le nombre des grains de sable ne sera pas supérieur à dix mille fois soixante-quatre mille. Or, ce nombre vaut six unités des nombres seconds plus quatre mille myriades des nombres primes ; il est donc inférieur à dix unités des nombres seconds.

D'autre part, une sphère ayant un diamètre de cent doigts est cent myriades de fois multiple de la sphère ayant un diamètre d'un doigt, puisque les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres. En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit. que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres seconds par cent myriades. Et puisque dix unités des nombres seconds sont le dixième nombre, à partir de l'unité, dans une progression dont les nombres sont en rapport décuple, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le seizième, à partir de l'unité, dans la même progression ; car il a été démontré que ce produit est éloigné, à partir de l'unité, de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés à partir de l'unité. Or, de ces seize nombres, les huit premiers, y compris l'unité, font partie de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, et le

dernier d'entre eux est mille myriades des nombres seconds. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume vaut une sphère du diamètre de cent doigts, est plus petite que mille myriades des nombres seconds.

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille doigts est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent doigts. En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille doigts, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres seconds par cent myriades. Et puisque mille myriades des nombres seconds sont le seizième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt- deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-deux nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les six restants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres troisièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille doigts est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes. Et comme une sphère ayant un diamètre d'un stade est plus petite qu'une sphère ayant un diamètre de dix mille doigts, il est encore évident que la quantité de sable dont le volume égale une sphère du diamètre d'un stade est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de cent stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre d'un stade. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent stades, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres troisièmes par cent myriades. Et puisque dix myriades des nombres troisièmes sont le vingt-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt-huitième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-huit nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés troisièmes, enfin, les quatre restants, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres quatrièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent stades, est plus petite que mille unités des nombres quatrièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille unités des nombres quatrièmes par cent myriades. Et puisque mille unités des nombres quatrièmes sont le vingt-huitième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le trente-quatrième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces trente-quatre nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les deux restants seront de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est dix unités des nombres cinquièmes. Il est donc évident que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille stades est plus petite que dix unités des nombres cinquièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de cent myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres cinquièmes par cent myriades. Et puisque dix unités des nombres cinquièmes sont le trente-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé

en multipliant sera le quarantième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces quarante nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est mille myriades des nombres cinquièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de stades, est plus petite que mille myriades des nombres cinquièmes.

D'autre part, une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent myriades de stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres cinquièmes par cent myriades. Et puisque mille myriades des nombres cinquièmes sont le quarantième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le quarante-sixième à partir de l'unité. Or, de ces quarante-six nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit autres suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit autres qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, les huit qui suivent les quatrièmes, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, enfin, les six restants sont de ceux qui ont été appelés sixièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres sixièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est plus petite que dix myriades des nombres sixièmes.

Une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres sixièmes par cent myriades. Et puisque dix myriades des nombres sixièmes sont le quarante-sixième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le cinquante-deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces cinquante-deux nombres, les quarante-huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes ; tandis que les quatre restants sont de ceux qui ont été appelés septièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres septièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, est plus petite que mille unités des nombres septièmes. Or, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades ; donc, il est évident aussi qu'une quantité de grains de sable, dont le volume égale celui du monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes. Dès lors, il est démontré que la quantité de grains de sable, dont le volume égale le monde, tel que se le représentent beaucoup d'astronomes, est plus petite que mille unités des nombres septièmes.

Au reste, je vais encore démontrer que la quantité de grains de sable, dont le volume égalerait une sphère telle qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, est plus petite que mille myriades des nombres huitièmes.

En effet, puisque l'on a supposé que le rapport de la terre au monde, tel que je l'ai défini, est le même que celui du dit monde à la sphère des étoiles fixes, telle que la suppose Aristarque, les diamètres de ces sphères auront entre eux le même rapport. D'autre part, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre ; donc, il est évident aussi que le diamètre de la sphère des étoiles fixes est plus petit que dix mille fois le diamètre du monde. Or, comme les sphères sont entre elles dans le rapport du cube de leurs diamètres, il est clair que la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est plus petite que dix mille myriades de myriades de fois la sphère du monde. Or, on a démontré qu'une quantité de grains de sable, dont le volume

égale le monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes ; donc, il est évident que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande que la sphère des étoiles fixes imaginée par Aristarque, le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant ces mille unités par dix mille myriades de myriades. Et puisque mille unités des nombres septièmes sont le cinquante-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que dix mille myriades de myriades sont le treizième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le soixante-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, ou mille myriades des nombres huitièmes ; par conséquent, il est clair que la quantité des grains de sable dont le volume égalerait la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est inférieure à mille myriades des nombres huitièmes.

Je conçois, roi Gélon, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières ; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil et du monde entier, les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.

Règle des mélanges et proportionnalité en 5e

David MAGNIEN, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône
Email : dmagnien@yahoo.com

1. Présentation

Quand le groupe DESCO a décidé de faire une brochure reprenant les travaux de Pierre Collaudin, j'étais un peu embêté pour choisir parmi les nombreux thèmes qu'il a creusés. J'enseignais alors en collège, et Pierre s'est plutôt concentré sur des travaux de haut vol, applicables surtout en lycée. J'ai alors repensé à l'exposé qu'il avait donné lors du colloque Histoire des Sciences en 2003 : « Alliages, Proportions et Règle des Mélanges ». Par exemple, dans quelle proportion dois-je mélanger un vin A à 80 cts le litre et un vin B à 65 cts le litre pour obtenir un vin à 70 cts le litre ? Je me suis dit que, quitte à forcer un peu, on pourrait faire rentrer dans mon programme de 5e le peu de proportionnalité que le mot « proportion » faisait miroiter. Très confiant, j'ai annoncé aux membres du groupe que, si, si, ça devait bien marcher, et que je pourrais sans doute produire une activité sur ce thème qui soit abordable en 5e, et que d'ailleurs je voyais à peu près comment faire.

Bon.

Autant l'annoncer tout de suite, ça marche. Mais j'ai quand même eu besoin d'un bon chausse-pied pour tenir mon pari.

2. Conception et préparation des activités

Mon principal souci avant de donner l'activité était sa lisibilité. Transformer en principe mathématique une recette de comptable pour introduire une notion importante me paraissait délicat. J'ai donc voulu placer cette activité, non pas en introduction à la proportionnalité comme j'en avais l'intention au départ, mais comme une application du concept pour résoudre des problèmes. Dans ce contexte, il me fallait transformer l'énoncé : je devais abandonner l'aspect découverte et analyse d'un document historique, pour m'orienter vers un énoncé plus conventionnel, une mise en forme plus proche des activités et exercices du chapitre. Ceci afin de les amener naturellement à découvrir « par eux-mêmes » les relations de proportionnalité cachées derrière le schéma en croix.

J'ai donc passé beaucoup de temps sur la mise en forme des questions. Ma classe de 5e étant d'un naturel contestataire, je voulais susciter le moins possible de remises en cause, du genre « mais ça sert à rien ! c'est bien plus facile avec la calculatrice ! », ou « j'y comprends rien, ça m'énerve ! », qui constituent hélas l'ordinaire de leurs réflexions lorsque je leur parle d'histoire des maths. En particulier, la légitimité du schéma en croix, figure centrale de l'article de Pierre, a mis du temps à venir. J'ai envisagé une justification *a posteriori*, en construisant toute l'activité comme une explication guidée du document historique. Ainsi les questions ont pour but de décortiquer le document, livré sans mode d'emploi, ce qui donne un premier objectif à l'activité, et évite un certain nombre de « mais ça sert à rien ».

Mais pas tous. Il restera sans doute quelques irréductibles adeptes du calcul électronique qui seront convaincus que tout ce qui date d'avant le téléphone portable est forcément rétrograde et a trouvé une solution plus simple et automatisée. C'est pourquoi j'ai prévu quelques exercices en fin

d’activité, avec totale liberté dans le choix de la méthode. Il est vrai que le schéma en croix présenté à la fin de la partie 2 est complexe au premier abord et peut rebuter ; on aimerait avoir une autre solution. Qui plus est, le problème des mélanges est de ceux qui semblent faciles à résoudre par un peu de calcul mental et de logique, mais qui exigent en fait qu’on prenne crayon et papier (ou calculatrice) et qu’on se gratte la tête un moment. Je compte sur cette apparente facilité pour attirer mes irréductibles et les perdre dans les méandres fumeux de calculs approximatifs, pour les voir revenir vers ma méthode penauds et reconnaissants. Quant aux « j’y comprends rien », je compte sur la progression lente et accompagnée de la difficulté des problèmes pour donner confiance aux élèves, et leur montrer, à la fin, qu’ils ont réussi à résoudre un problème *a priori* délicat et posé à partir d’un document difficile à déchiffrer. Comme quoi on ne soulignera jamais assez, dans les IUFM, le rôle de la manipulation psychologique dans notre enseignement.

J’ai soumis une ébauche de cette activité aux membres du groupe pour avoir leur avis. En fait, deux ébauches. La première tentait de rester fidèle à l’esprit historique du problème, et se voulait une explication pas à pas de la règle des mélanges. Si son intérêt était indéniable du point de vue historique, elle ne faisait que peu appel à la proportionnalité. J’ai donc retenu la seconde, plus centrée sur la proportionnalité. Elle présentait cependant une difficulté : après avoir résolu un exercice simple, je demandais aux élèves, en question ouverte, comment expliquer l’utilisation de la proportionnalité dans ce problème ; ce qui ne manquerait pas de susciter des débats et des explications. Mais c’est là qu’est l’intérêt. On est ici confronté à un problème où maths et bon sens doivent s’allier pour donner la solution ; avoir l’opinion intuitive des élèves sur le problème, et argumenter pour leur montrer qu’il faut un peu de formalisme, est primordial, surtout dans le cadre d’une activité historique.

Je me suis d’ailleurs perdu moi-même en devançant les questions de mes élèves. Finalement, à quoi sert la proportionnalité là-dedans ? Elle est certes indéniable, mais quelles sont les quantités proportionnelles ? Je dois une fois de plus rendre grâce au groupe, qui m’a donné l’explication qui figure dans la partie précédente, et qui n’est pas des plus simples pour des élèves de 5e. J’ai donc renoncé à faire apparaître la proportionnalité inverse dans l’activité, et j’ai usé d’un subterfuge pour pouvoir utiliser la proportionnalité simple (la proportion de B est proportionnelle à l’écart de A par rapport au prix souhaité).

Je pose tout d’abord un problème très simple aux élèves, avec un vin à 80 cts et un autre à 60 cts, où il faut trouver la proportion pour du vin à 70 cts. La solution doit tomber assez vite, car elle se base sur le bon sens plus que sur les maths. Le second problème a l’air similaire, mais s’ils essaient de le résoudre de la même façon ils échoueront. Je compte sur l’absence d’indications pour les égarer ; ils essaieront sans doute de tâtonner, et certains bons élèves dégageront peut-être la méthode. Je leur distribuerai la deuxième page de l’activité ensuite, pour ne pas qu’ils regardent le diagramme en croix et qu’ils puissent chercher et s’approprier le problème. Cette seconde feuille comporte plus de questions, qui sont là à la fois pour guider et pour rassurer les élèves : à ce stade, la tentation d’abandonner face à cet exercice peu conventionnel sera grande. Les questions les remettent en terrain connu : le contrat didactique « le prof pose des questions / je réponds » reprend ses droits.

J’ai souhaité susciter la curiosité des élèves en ne leur donnant pas de lexique pour la résolution des exercices de la dernière partie, tirés des textes historiques sans traduction. Je sais par expérience qu’ils sont prompts à poser des questions sur les aspects historiques : ça comble leur soif d’anecdotes et ça permet de ne pas faire de maths pendant ce temps.

On pouvait aborder ce problème sous d’autres angles. Une approche barycentrique, par exemple : le prix du mélange est un barycentre des prix des différents vins, et il faut retrouver les coefficients (définis à une constante multiplicative près). Il serait intéressant d’étudier la part que le problème des mélanges a jouée dans l’élaboration de la théorie des barycentres : même si cette théorie est essentiellement d’origine mécaniste, la résolution barycentrique est assez naturelle pour qu’on se pose la question. On peut d’ailleurs remarquer que la règle des mélanges utilise la proportionnalité (ou la proportionnalité inverse) depuis 1202, alors que le concept n’a été formalisé

que beaucoup plus récemment. On pourra aussi penser à la règle des leviers d'Archimède : si on a un poids A lourd et un poids B plus léger, il faudra accrocher A proche et B loin du point d'appui pour obtenir l'équilibre. C'est d'ailleurs ainsi que Pierre Collaudin présentait la règle des mélanges dans son article.

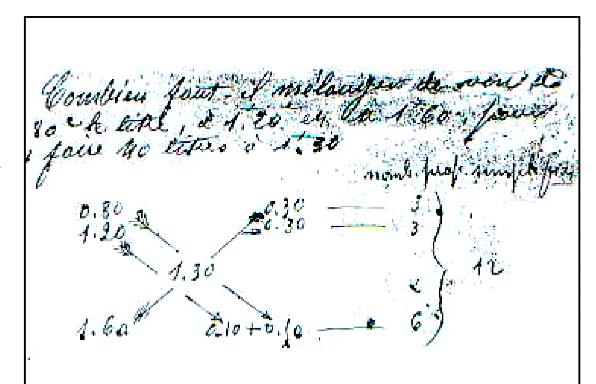
Merci encore au groupe DESCO Histoire des maths pour m'avoir aidé à débroussailler cette activité, en en particulier à Philippe Regnard qui m'a fourni les reproductions du manuel de Blondel. Commentaires, addenda et compléments bienvenus sur mon email.

3. Activité proposée :

Voici le premier document proposé aux élèves :

<u>Proportionnalité et mélanges</u>

Ce problème trouvé sur la page de garde d'un ouvrage d'algèbre élémentaire de 1849 est une application type de la règle des alliages et des mélanges :



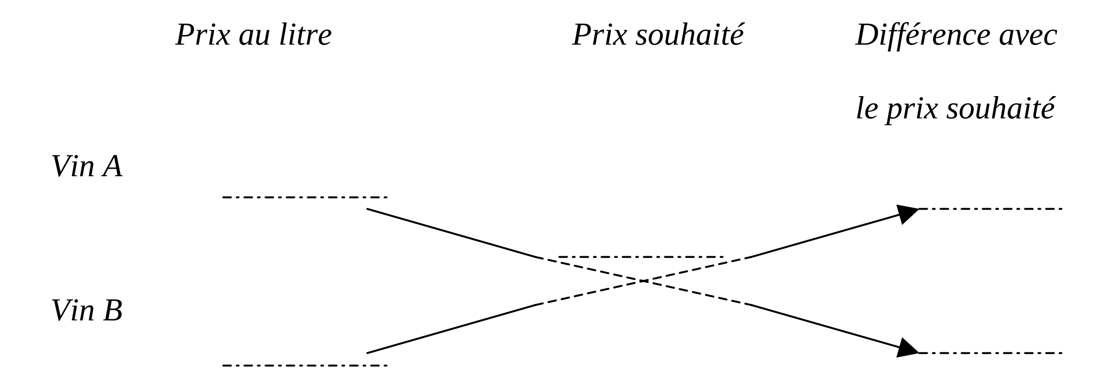
« Combien faut-il mélanger de vin à 80 c le litre, à 1,20 et à 1,60 pour faire 40 litres à 1,30 ? »

Ce type de problème pratique a été étudié depuis très longtemps : on en trouve la trace dans un livre datant de 1202, écrit par Léonard de Pise (qu'on appelait aussi Fibonacci), un érudit italien. La méthode est la même : on utilise la proportionnalité, mais aussi le bon sens…

<u>Partie 1 :</u> un problème plus simple : (tiré de Jacquet et Laclef, "cours d'arithmétique théorique et pratique", Nathan, 1904)

" On a du vin à Ofr. 75 le litre et du vin à 0 fr. 60 le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir un vin qui reviennent à 0 fr. 70 le litre ? »

1) Appelons « vin A » le vin à 0,60F le litre et « vin B » le vin à 0,75F le litre.
   a) J'ai un litre de vin A. Si je le vendais 0,70F, combien aurai-je en trop ?
   b) J'ai un litre de vin B. Si je le vendais 0,70F, combien me manquerait-il ?
2) Combien de litres de vin A et de vin B faut-il vendre pour que ces écarts se compensent ?
3) Combien de fois plus de vin B faut-il que de vin A ?
4) On peut résumer ces calculs par le diagramme en croix suivant :



Retrouve-t-on sur ce diagramme les proportions calculées aux questions 2) et 3) ?

Le diagramme en croix donne donc la réponse sans avoir besoin de faire des calculs compliqués. On l'appelle ***<u>règle des mélanges</u>***. Peut-elle nous aider à résoudre le problème de départ ?

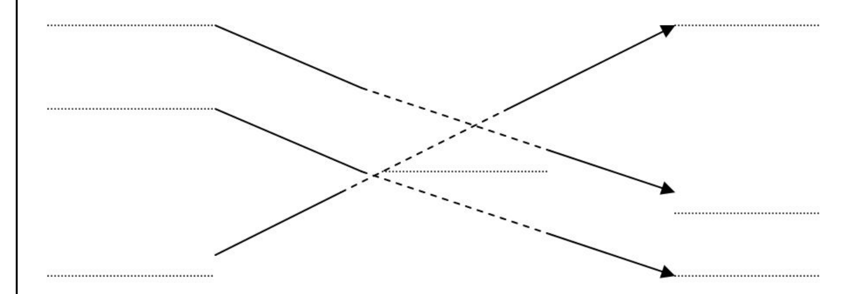
Une fois que les élèves ont fini l'exercice et que la correction est faite, on distribue le deuxième document :

<u>Partie 2 :</u> retour au problème des trois vins :

Appelons « Vin A » le vin à 80c, « Vin B » le vin à 1,20F et « Vin C » le vin à 1,60F.

1) a) J'ai un litre de vin à 80c. Si je le vends 1,30F, combien ai-je en trop ?
   b) J'ai un litre de vin à 1,20F. Si je le vends 1,30F, combien ai-je en trop ?
   c) J'ai un litre de vin à 1,60F. Si je le vends 1,30F, combien me manque-t-il ?

2) Utilisons le diagramme ci-dessous :



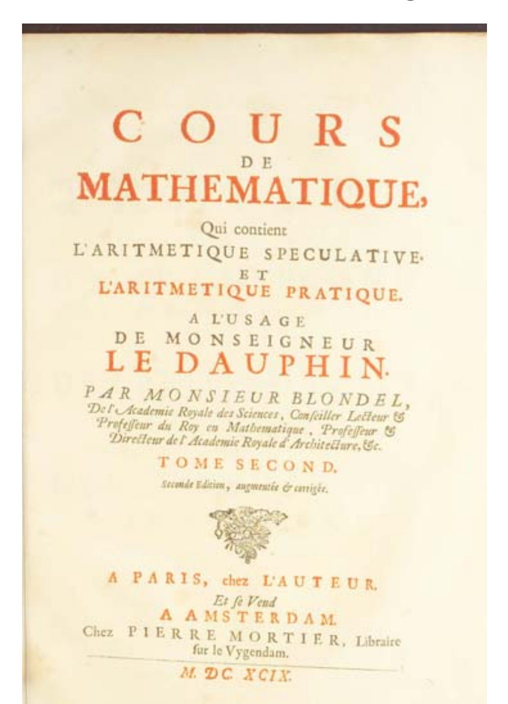
La dernière colonne donne-t-elle les bons résultats ? Vérifier avec un exemple.

3) On veut obtenir 40 litres de mélange avec ces proportions. Combien de litres de chaque vin doit-on verser ?

Enfin, après avoir corrigé la partie 2 et expliqué la règle des mélanges et le schéma en croix, on passe à la dernière partie, où les élèves sont laissés en autonomie face aux exercices suivants :

<u>Partie 3 :</u> d'autres exemples historiques:

Ce procédé de calcul a l'avantage de pouvoir se faire sans avoir de grandes connaissances mathématiques, et a donc bien servi le commerce à de nombreuses époques. On le trouve expliqué en particulier dans les livres de Nicolas Barreme, publiés au XVIIe siècle, et qui ont tant de succès auprès des professionnels que leurs ventes ont assuré la fortune de son auteur et de sa famille. Voici quelques exemples tirés de ces livres et d'autres ouvrages semblables de la même époque. Pouvez-vous les résoudre à l'aide de la règle des mélanges ?



COURS DE MATHEMATIQUE, Qui contient L'ARITMETIQUE SPECULATIVE ET L'ARITMETIQUE PRATIQUE. A L'USAGE DE MONSEIGNEUR LE DAUPHIN. PAR MONSIEUR BLONDEL, De l'Academie Royale des Sciences, Conseiller Lecteur & Professeur du Roy en Mathematique, Professeur & Directeur de l'Academie Royale d'Architecture, &c. TOME SECOND. Seconde Edition, augmentée & corrigée. A PARIS, chez L'AUTEUR. Et se Vend A AMSTERDAM. Chez PIERRE MORTIER, Libraire sur le Vygendam. M. DC. XCIX.

CHAPITRE VII.

Regles d'Alliage.

CHAP. VII. Regle d'Alliage.

LEs Regles d'Alliage ſervent à conoître quelle doit être la quantité de chacune des choſes de differentes valeurs que l'on veut meſler ou allier enſemble, de telle ſorte que leur maſſe devienne d'un prix ou d'une valeur determinée. Ce qui ſe fait en multipliant les prix ou valeurs qui excedent la propoſée, par les differences reciproques des prix ou valeurs qui defaillent de la même, & multipliant les prix ou valeurs qui ſont moindres que la propoſée, par les differences reciproques des prix ou valeurs qui excedent la même. Comme dans ces exemples.

<u>Exercice 1 :</u>

Un marchand a de trois ſortes de vins qui valent l'un 8 ß la pinte, l'autre 4 ß & l'autre 3 ß. Il voudroit ſçavoir ce qu'il en doit prendre de chacun pour les mêler & en faire un tonneau qu'il pût debiter à 6 ß la pinte.

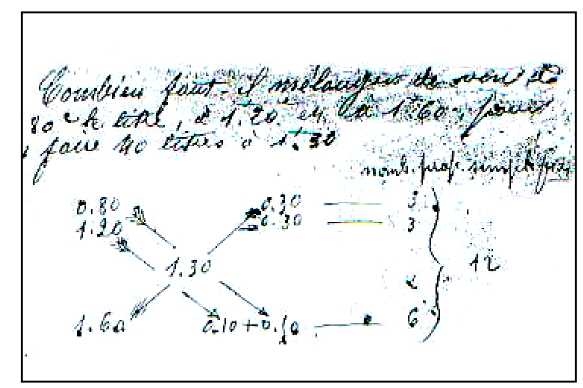
<u>Exercice 2 :</u>

Un marchand veut acheter 355 aunes d'étoffe pour le prix de 4260 livres. On lui en montre de cinq ſortes qui lui plaiſent, ſçavoir à 17 livres, à 15 livres, à 11 livres, à 9 livres, à 6 livres l'aune. Il voudroit ſeulement ſçavoir combien il en peut prendre de chacune pour avoir la quantité de 355 aunes & pour l'argent qu'il y veut employer. Pour cet effet il faut premierement ſçavoir quel eſt le prix de l'aune poſé que les 355 valent 4260 livres. Ce que l'on fait en diviſant 4260 par 355 : Car le quotient 12 eſt le prix de l'aune que l'on demande. La queſtion eſt donc de ſçavoir combien il doit prendre d'aunes de chaque eſpece pour faire la quantité de 355 qui reviennent à 12 livres l'une

<u>Exercice 3 :</u> *Exemple d'alligation*

Un orfèvre a de l'argent à quatre sortes d'aloi, à savoir à 17 livres, à 19, à 24 & à 37 liv. le marc, un Seigneur le vient trouver, qui veut faire faire 240 marcs de vaisselle d'argent, & entend que le marc de la vaisselle ne lui revienne qu'à 21 livres d'aloi; on demande combien ledit Orfèvre doit prendre de chaque sorte de son argent, afin de composer les 240 marcs, & que le marc ne revienne qu'à 21 livres.

4. Courte discussion théorique



Voici le document qu'a utilisé Pierre Collaudin comme point de départ de son exposé. Il s'agit vraisemblablement de notes prises par un étudiant sur la page de garde d'un ouvrage d'algèbre élémentaire de 1849. L'énoncé demande : *« Combien faut-il mélanger de vin à 80 c le litre, à 1,20 et à 1,60 pour faire 40 litres à 1,30 ? »*

On verra qu'il s'agit d'un diagramme de proportionnalité inverse, construit dans le même état d'esprit que nos classiques raisonnements de « règle de trois ». Souvenons-nous : 25 L de vin coûtent 40 F (restons au IIe millénaire), donc combien coûtent 10 L de vin ? On peut évidemment dégainer un tableau de proportionnalité, mais le plus souvent, et en particulier dans la littérature scolaire du début du siècle (Barème, par exemple), on trouve la présentation suivante :

25 L ⟶ 40 F
10 L ⟶ …….

Il ne reste plus qu'à trouver le coefficient de proportionnalité, ou à utiliser les produits en croix. Dans ce cas précis, la solution est unique.

Revenons à notre problème de mélanges dans le cas de deux vins seulement (mélange binaire), un vin A à à 60 cts le litre et un vin B à 75 cts le litre, pour fixer les idées ; on vise un mélange à 70 cts le litre. Le principe du mélange est de prendre à l'un pour donner à l'autre : plus mon vin A est loin du prix souhaité, plus je dois ajouter de mon vin B. Ainsi, les écarts par rapport au prix souhaité sont *inversement* proportionnels aux proportions à respecter : si on *augmente* le prix au litre d'un vin, on devra diminuer sa proportion dans le mélange, et donc *augmenter* celle de l'autre vin. Le diagramme en croix permet donc de placer en vis-à-vis des quantités qui évoluent dans le même sens, le prix du vin A et la proportion de vin B, tout comme dans le diagramme de proportionnalité simple vu un peu plus haut.

Il s'agit donc seulement d'une commodité de présentation. On pourrait penser, en regardant le diagramme pour deux vins proposé dans l'activité (document 1) que les flèches symbolisent deux droites affines dont l'intersection donne le prix du mélange. C'est presque une façon de résoudre le problème, mais trompeuse. Notons $x \in [0\,;\,1]$ la proportion de vin B dans le mélange, y_B la contribution du vin B au prix d'un litre de mélange, et y_A celle du vin A. Il vient alors :

$$\begin{cases} y_A = 0,6(1-x) \\ y_B = 0,75x \end{cases}$$

Chercher l'intersection de ces droites n'a guère de sens : on voudrait que la contribution des deux vins soit la même ? Cela ne répond pas à la question, et d'ailleurs la résolution du système donnerait $x = 4$, ce qui est absurde. Non, l'équation qu'appelle notre problème est :

$y_A + y_B = 0,70$

qui est une équation à une inconnue dont la solution est $x = 2/3$. En effet, en raisonnant autrement, l'écart entre le prix du vin B et le prix visé est moitié moindre que celui du vin A, donc la proportion de vin B doit être double de celle de A pour compenser : $x = 2(1 - x)$, d'où $x = 2/3$.

Est-il néanmoins possible de ramener le problème à une intersection de droites ? J'en doute : quelle autre inconnue choisir ? Le problème appelle une solution qui est une proportion (les données sont des prix au litre), donc la mise en équation ci-dessus s'impose. Qui plus est, lorsqu'on passe à un mélange ternaire ou quaternaire, on obtiendrait trois ou quatre droites qui devraient être concourantes…

Intéressons-nous justement au problème de départ avec trois vins, qu'on nommera respectivement A, B et C. L'énoncé demande des quantités en litres, mais la recherche des proportions permet de répondre.
Comment l'étudiant a-t-il procédé ? Il a utilisé le même principe que précédemment : plus l'écart du prix d'un vin avec le prix visé est grand, plus il faudra augmenter les proportions des autres vins. L'étudiant a donc classé les vins par ordre croissant de prix de haut en bas, en les disposant de part et d'autre du prix visé : A et B, dont le prix au litre est inférieur à 1,30 F, sont au-dessus ; C est lui en dessous : A et B devront contrebalancer son influence.
Ce n'est pas par hasard que j'utilise le vocabulaire des leviers chers à Archimède : en fin exégète du grand homme, Pierre Collaudin a voulu présenter son article sous cet angle. La proportionnalité inverse entre un poids et sa distance au point d'équilibre est la base de la théorie des leviers d'Archimède, et on la retrouve exactement ici. Le diagramme en croix peut se voir comme le schéma d'un problème de leviers, où les proportions des vins jouent le rôle des poids, et le prix visé est le point d'appui, de part et d'autre duquel les vins sont placés en fonction de leur prix au litre ; les écarts de prix s'interprètent alors comme des distances au point d'appui.
Mais si A et B contrebalancent C, doivent-ils le faire en égale proportion ? C'est l'option la plus simple, qui a été choisie par l'étudiant : l'extrémité de la flèche issue de C se subdivise en deux, l'une pour A et l'autre pour B, chacun devant alors contrebalancer les 30 centimes d'écart à sa façon. En bas du diagramme, les écarts de A et B sont ajoutés et contrebalancés ensemble par C. La somme « des » écarts du haut du diagramme (l'écart de C est compté deux fois, car A *et* B doivent le compenser) est donc de 60 centimes, et celle du bas également : coup de chance, on peut donc résoudre le problème de tête. L'étudiant a choisi d'affecter les proportions 3, 3 et 6, sans doute en prenant le chiffre des dixièmes pour ne pas se fatiguer. Il aurait évidemment pu prendre 1, 1 et 2, puisque tout ceci est un calcul de barycentre (on retrouve les leviers). On obtient les quantités en litres par proportionnalité.
Peut-on choisir des proportions différentes pour A et B ? Essayons avec un coefficient 4 pour A et 2 pour B : un rapide calcul donne :

$$\frac{0,8\times4+1,2\times2+1,6\times6}{12}=1,1$$

qui ne convient pas. On ne peut pas donc répartir n'importe comment les 60 centimes d'écart de C entre A et B.
Si on appelle *x* la proportion de vin A et *y* celle de vin B, le problème s'écrit ainsi :

$\begin{cases} 0,8\,x + 1,2\,y + 1,6\,(1 - x - y) = 1,3 \\ x,\ y \in [0\ ;1] \end{cases}$, ce qui donne après simplification : $\begin{cases} y=-2x+\dfrac{3}{4} \\ x\in\left[0,\dfrac{3}{8}\right] \end{cases}$

qui est l'équation d'un segment de points solutions. Ce segment est en fait l'intersection de la droite d'équation $y=-2x+\frac{3}{4}$ et du carré unité.

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ est situé sur ce segment : il correspond au choix de l'étudiant (coefficient 3 sur un total de 12, ou 1 sur 4). Celui de coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$, qui correspond à notre essai, n'y est pas.

On peut aussi se demander si la méthode qui consiste à donner le même poids à deux vins situés du même côté du prix visé est toujours valable. Il faut pour cela que le segment coupe la première bissectrice du repère à l'intérieur du carré unité; sa longueur et son équation peuvent donc faire qu'aucune solution ne soit possible.

Appelons respectivement a, b et c les prix au litre des vins A, B et C, et m le prix au litre du mélange. On supposera $a < b < c$, ce qui correspond à la méthode de l'étudiant qui classe les vins par ordre de prix croissant. Etudions d'abord l'existence d'une solution quelconque, c'est-à-dire avec (x,y) dans le carré unité. Dans ce cas général, le problème peut s'écrire :

$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,(1 - x - y) = m \\ (x, y) \in [0\,;1]^2 \end{cases}$, et donne : $\begin{cases} y = \dfrac{c-a}{b-c}x + \dfrac{m-c}{b-c} \\ x \in [0;1] \cap \left[\dfrac{b-m}{c-a};\dfrac{c-m}{c-a}\right] \end{cases}$

Premier constat : le coefficient directeur est négatif. L'intersection entre la droite et le carré unité est réalisée si $[0;1] \cap \left[\dfrac{b-m}{c-a};\dfrac{c-m}{c-a}\right]$ est non vide. Avec l'hypothèse raisonnable $a < m < c$ on trouve $\dfrac{c-m}{c-a} \in [0;1]$ et on a bien une solution. Notons que cette solution existe que le prix du mélange soit inférieur ou supérieur au prix du vin B : qu'on ait deux vins plus chers ou moins chers que le mélange importe peu.

Si on ajoute la condition $x = y$, on obtient $x = \dfrac{m-c}{a+b-2c} \in [0;1]$. $m - c < 0$ donc $a + b - 2c$ aussi, et on doit donc avoir $a + b - 2c \leq m - c \leq 0$, soit $a + b - c \leq m \leq c$. Ceci est toujours vrai, et ce grâce à notre hypothèse raisonnable $a < m < c$: en effet, $b - c < 0$, donc
$a + b - c < a < m < c$. On peut donc toujours choisir une solution où les vins A et B sont en proportion égale.

Concluons sur le cas d'un mélange de quatre produits, évoqué dans les dernières activités historiques distribuées aux élèves. On obtient une équation de plan qui, jointe à la condition sur les coefficients, nous donne (ou non) un polygone fini de solutions. Dans ce cas, on peut avoir trois vins d'un côté et un de l'autre, ou deux vins de part et d'autre, du prix visé, et le choix d'égaliser les proportions de deux ou trois vins s'interprètera par l'intersection du polygone avec le plan $x = y$ ou avec la droite $x = y = z$, selon le cas et les choix des inconnues. On peut à nouveau aborder le problème sous l'angle de la théorie des leviers, avec cette fois-ci quatre poids sur l'axe, répartis de part et d'autre du point d'appui.

5. Analyse et bilan :

En relisant les paragraphes sur la conception de l’activité, je constate que ma plus grande peur au moment où je les rédigeais était que mes élèves fassent capoter la séance par trop de questions, trop de contestation, trop de digressions. Bref, j’avais peur de ne pas pouvoir maîtriser l’espace verbal au cours du déroulement de l’activité.

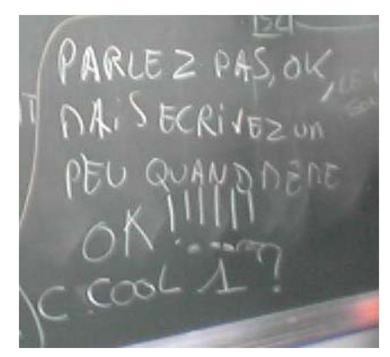
Je me trompais totalement.

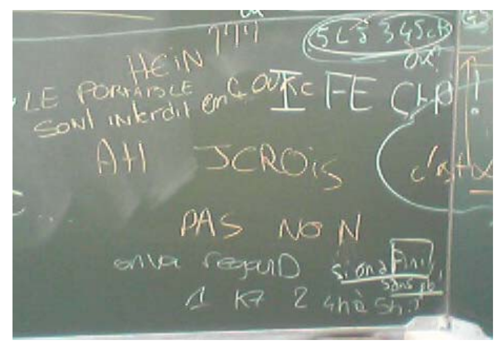
En cette dernière semaine de l’année, juste avant le brevet, j’aurais dû me rendre compte que mes élèves étaient bien trop sages quand ils sont entrés. Sans me méfier, je les salue et les répartis en groupes. Au début de l’année, j’ai formé ces groupes en fonction des niveaux et des personnalités, en mélangeant des éléments moteurs et des élèves plus faibles, par affinités, pour obtenir des ensembles hétérogènes mais dynamiques et motivés, qui sont restés fixes au cours de l’année. Je mets les élèves en groupes dès qu’il s’agit de réfléchir à des problèmes ouverts ou de dégager des propriétés à partir d’exercices. Je leur distribue donc l’activité ; je demande ensuite à un volontaire de bien vouloir me lire le texte de départ et le premier énoncé. Un seul accepte, alors que d’habitude ils sont très volontaires. Malheureusement, il ne brille pas par son élocution, et je dois lancer un nouvel appel à volontaires.

C’est là que le silence qui règne dans la classe me frappe. Surtout quand quelques filles commencent à pouffer dans mon dos, silencieusement.

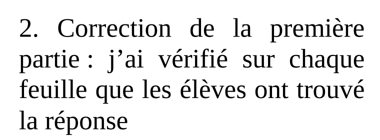
Zut, ils ont décidé une grève de la parole. Et ça devait tomber ce jour là.

Tant pis. Je les lâche sur l’exercice 1. Quelques élèves commencent à rechercher, certainement parce que le problème leur plaît. Les autres n’écrivent rien et semblent attendre une réaction de ma part. Je vais au tableau et, rentrant dans leur jeu, j’y écris, en gros et en silence : « Ne dites rien, OK, mais écrivez un peu quand même ! ». Immédiatement les deux déléguées se lèvent et écrivent leur réponse au tableau : « Ah non, pas moyen ! », écrit la première ; et la seconde : « C’est cool, hein ? ». J’insiste, toujours par écrit : « L’ex 1 est facile. Essayez ! ». Le fait que je rentre dans leur jeu leur plaît, et ils se mettent au travail.



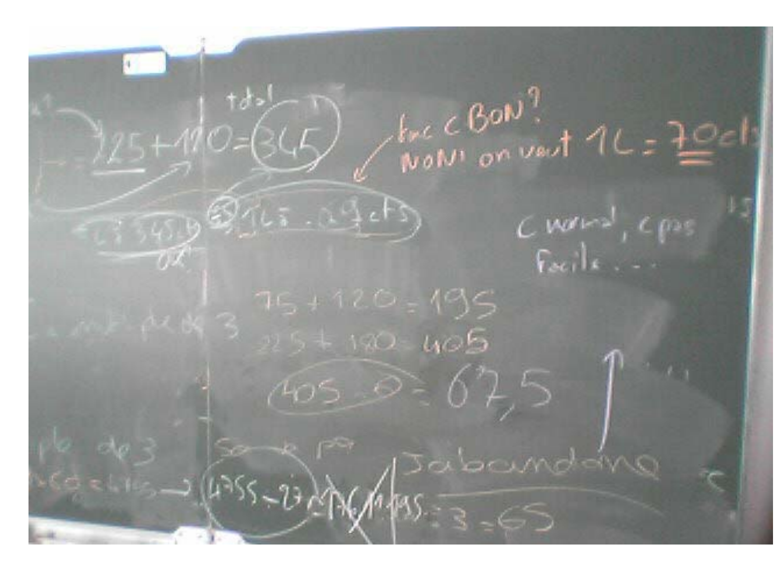


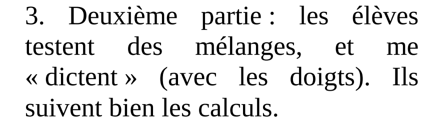
1. Premières réactions


2. Correction de la première partie : j’ai vérifié sur chaque feuille que les élèves ont trouvé la réponse



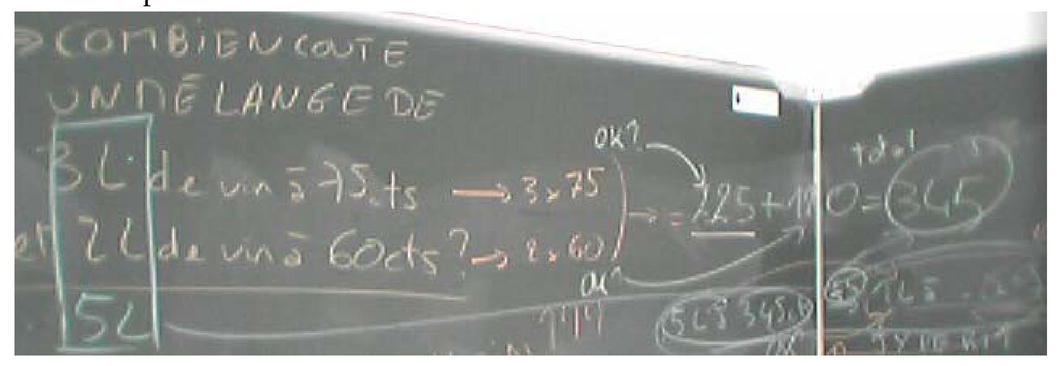
Voilà. On tient un peu plus d'une heure et demie, sans un mot, en communiquant uniquement avec le tableau et les craies. Si un élève a une question, il lève le doigt et vient l'écrire. Si je veux solliciter leur attention, un claquement de mains ou quelques petits coups sur le tableau suffisent à leur faire lever la tête. Les élèves communiquent entre eux par écrit ou à voix très basse ; d'un groupe à l'autre, ils s'appellent en claquant de la langue, puis communiquent avec force signes. Je circule entre les tables pour contrôler l'avancement de leur travail. Quelques-uns en profitent pour me demander des explications, à voix basse, presque honteusement, comme s'ils avaient conscience de tricher au petit jeu que nous menons ; un élève commence à écrire au dos de sa feuille une longue question dans une orthographe approximative : je l'interromps et lui réponds à l'oral. Je vois même un élève, très défaitiste d'ordinaire, se lever et écrire au tableau : « J'abandonne, c'est trop compliqué ».



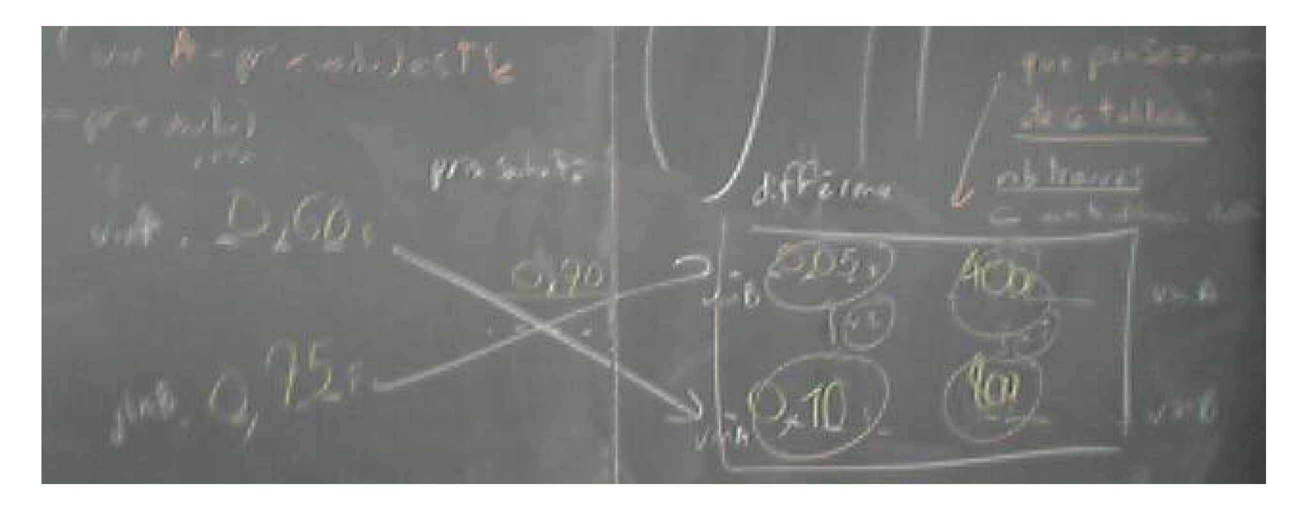

3. Deuxième partie : les élèves testent des mélanges, et me « dictent » (avec les doigts). Ils suivent bien les calculs.

Je tiens tout de suite à me justifier auprès des puristes qui ne manqueront pas de m'épingler pour l'orthographe SMS des interventions au tableau : dans un contexte où la spontanéité écrite prime, il ne m'a pas semblé idiot d'adopter cette syntaxe moderne chère à nos jeunes, que par ailleurs ils maîtrisent très bien, et qui participe du même besoin de communiquer rapidement par écrit.

J'ai décidé de jouer le jeu pour plusieurs raisons. Tout d'abord, c'est super rigolo. Ensuite, ça leur permet de bien penser leurs interventions, de synthétiser leurs questions, et ça les force à prêter attention à ce qui est « dit » : chaque intervention impliquant un passage au Tableau (avec la majuscule qui sied), lieu de tous les dangers, où l'on s'expose devant la classe et tout près, si près, du professeur, tous suivent attentivement leur camarade qui s'est levé pour poser une question ou donner une réponse.

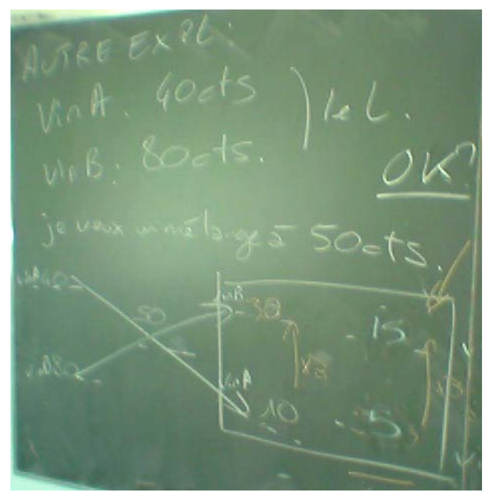


4. Le test ne donne pas le bon prix pour le mélange. Ils commencent à sentir ce qu'il faut faire. En jaune, un test calculé au tableau par mon élève défaitiste.



5. Après résolution par tâtonnements successifs, présentation méthodique sous forme de tableau

Certains n'attendent même pas que leur camarade soit revenu à sa place, ni que j'aie le temps de lui répondre par écrit, et se lèvent pour écrire leur vision du problème juste à côté. J'ai même assisté à des débats furieux par écrit, entre deux, voire trois élèves qui contestaient le raisonnement de l'autre, et demandaient silencieusement aux élèves du premier rang de calculer pour eux des expressions à la calculatrice (voir image 7). Une grande coopération, totalement inattendue, est née de cette contrainte. Enfin, ça m'a permis de pouvoir relever tout ce qui a été « dit » en prenant des clichés du tableau avant de l'effacer. Il me semble, a posteriori, qu'on a là une démarche qui participe de l'essence de la pensée et de l'écriture mathématique : écrire de façon concise, réfléchir par écrit, et donc justifier, débattre, s'intéresser.



6. Résolution d'un autre problème de mélange binaire, directement avec le tableau : bien compris par les élèves bons et moyens

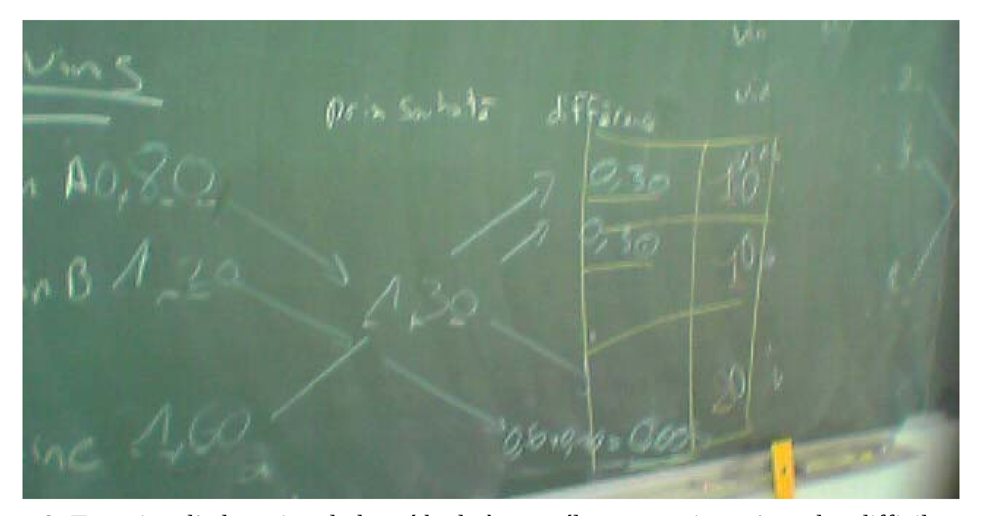


7. Un débat entre élèves, tout à la craie ; les élèves du premier rang arbitrent à la calculatrice. Les trois élèves sont (de g. à d.) moyen-désinvesti, faible et bon : le jeu permet d'oser.

Pour conclure sur la forme qu'a prise cette séance de deux heures, il me semble que la contrainte du silence n'a que très peu ralenti les élèves. Elle les a surtout motivés. Avant toute chose, il ne faut pas oublier qu'ils ont décidé eux-mêmes de s'imposer le silence ; je crois que si je l'avais demandé rien n'aurait été possible. Ensuite, cette nouvelle façon, très ludique, de faire des maths, leur a plu.

6. Conclusion

La règle des mélanges a été abordée comme je le prévoyais, par tâtonnements. La méthode a été dégagée peu à peu. Quatre bons élèves ont trouvé les calculs systématiques à faire pour trouver les proportions du mélange ; ils trouvaient compliquée la méthode du tableau en croix. Ils sont allés au tableau par deux fois écrire et expliquer leurs calculs. Les autres élèves ont compris, mais préfèrent la méthode de la croix. Quant aux récriminations que je redoutais, le jeu les a occultées. Je n'ai pas eu le temps d'aller au bout de l'activité, avec les exercices historiques ; au bout d'une heure et demie, nous finissions à peine de systématiser le mélange de deux vins. Le mélange de trois vins a été abordé mais pas terminé de manière satisfaisante, malgré la fin du jeu après 1h 35 min : il restait une quinzaine de minutes à peine.



8. Tentative d'adaptation de la méthode à un mélange ternaire : c'est plus difficile pour eux. La lassitude s'installe.

Les équations diophantiennes[1] *(1) chez Bézout*[2] *(2)*

Jean TERRERAN (avec la collaboration de Thierry DASSÉ et Mickaël VÉDRINE)
Lycée Catherine et Raymond Janot de Sens

Une équation diophantienne est une équation linéaire à coefficients entiers, à deux inconnues entières, par exemple : $17x - 11\,y = 542$.
Leur résolution a figuré pendant longtemps au programme de terminale C et aujourd'hui elle est inscrite au programme d'arithmétique de la spécialité en terminale S.
La méthode étudiée en cours était utilisée par Lagrange et Gauss.
Le texte de Bézout, plus ancien, est extrait du tome 2 du « Cours de Mathématiques, à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine », disponible à la Bibliothèque Municipale de Sens. Il met en œuvre, comme souvent chez cet auteur, un procédé original qui, bien que technique, semble plus intuitif, et donc plus « lisible ».
Il était donc tentant d'en proposer l'étude aux élèves.

Acte 1 : Dans la classe de Terminale S spécialité de Thierry Dassé en 2005

C'est une classe de vingt et un élèves, de niveau correct.
Nous leur présentons brièvement Etienne Bézout et l'objectif de la séance : « Etudier une équation diophantienne à partir d'un document du XVIIIe siècle écrit par ce mathématicien. »
Les élèves ont déjà résolu ce type d'équation en cours.
Ils se mettent rapidement au travail en suivant les indications fournies et en posant des questions aux deux professeurs (voir en annexe 2 le document fourni aux élèves).

Déroulement de la séance (1h)

Passé l'effet de surprise créé par la découverte de l'orthographe du français du XVIIIe siècle, les élèves effectuent les calculs avec aisance et reconnaissent l'algorithme d'Euclide.
Quant à la méthode étudiée auparavant en cours, question 2° c, elle est bien maîtrisée ; les élèves procèdent ainsi :
Les nombres 17 et 11 étant premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que :

$$17\,u + 11\,v = 1.$$

En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres 17 et 11, il est assez rapide de trouver des valeurs de u et v.

---

[1] Diophante est un mathématicien d'Alexandrie qui vécut probablement entre 150 et 350 de notre ère.
[2] Etienne Bézout est un mathématicien français né en 1730 à Nemours, où le lycée porte son nom, mort en 1783 aux Basses-Loges (près de Fontainebleau).
Il a enseigné dans une école militaire et à écrit un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine (en cinq tomes).
Le théorème de Bézout sur les nombres premiers entre eux, utilisé dans cette activité, est maintenant attribué au mathématicien, philosophe, traducteur de Diophante, Bachet de Méziriac (1581-1638), Bézout l'ayant appliqué aux polynômes.

$$17 = 1\times 11 + 6,$$
$$\text{donc}\quad 6 = 1\times 17 - 1\times 11.$$
$$11 = 1\times 6 + 5,$$
$$\begin{aligned}\text{donc}\quad 5 &= 1\times 11 - 11\times 6\\ &= 1\times 11 - 1\times (1\times 17 - 1\times 11)\\ &= -1\times 17 + 2\times 11.\end{aligned}$$
$$6 = 1\times 5 + 1,$$
$$\begin{aligned}\text{donc}\quad 1 &= 1\times 6 - 1\times 5\\ &= 1\times (1\times 17 - 1\times 11) - 1\times (-1\times 17 + 2\times 11\end{aligned}$$
$$\text{Finalement}\quad 1 = 2\times 17 - 3\times 11.$$

En général la méthode permettant d'obtenir u et v est programmée sur les calculatrices des élèves (voir l'organigramme en annexe 1).

Ayant obtenu $1 = 2\times 17 - 3\times 11$, on obtient une première solution de l'équation en multipliant par 542 : $17\times 1084 - 11\times 1626 = 542$.
Si (x, y) est une autre solution, on a aussi : $17\times x - 11\times y = 542$
Et, en soustrayant membre à membre, il vient : $17\times (x - 1084) = 11\times (1626 - y)$

17 divise donc $11\times(1626 - y)$.
Or il est premier avec 11, donc il divise $1626 - y$.
On obtient $y = 17k + 1626$, et après substitution $x = 11k + 1084$, avec k entier.

Mais beaucoup peinent à montrer que l'on obtient bien les mêmes solutions, l'aide du professeur est souvent requise.

Commentaires :

Les élèves semblent bien comprendre la démarche de Bézout. Mais leurs doutes concernant l'équivalence des deux méthodes n'ont pu être entièrement levés par le raisonnement, certains ont eu besoin d'effectuer des calculs détaillés pour s'en convaincre.

Résultats du devoir sur feuille :

Un élève a fait une erreur en « oubliant » la première équation : il obtient donc une infinité de solutions.
Plusieurs élèves ont été maladroits (par exemple : « ils tirent la valeur de l'inconnue qui a le plus grand coefficient », ils font donc un tour pour rien.)

Commentaires :

Les copies sont de bonne qualité, l'expression est soignée. Certains élèves se prennent au jeu et réutilisent des expressions de Bézout ; ainsi l'expression « en prenant pour *s* tel nombre entier qu'on voudra » a été préférée à « quel que soit le nombre entier *s* ».
Mais nous étions curieux de découvrir les réponses à la dernière question.
C'est peut-être la première fois que les élèves peuvent s'exprimer sur des méthodes, ils l'ont fait très sérieusement en développant souvent une argumentation intéressante pour expliquer leurs choix (voir le détail en annexe 5).
Les réponses peuvent se répartir en trois catégories :
1. Les élèves qui préfèrent la méthode vue en cours parce qu'elle est plus courte, l'autre nécessitant trop de changements de variables (Voir en annexe 4 comment Bézout donne un moyen de raccourcir sa méthode).
2. Les élèves qui préfèrent la méthode de Bézout, car on y voit mieux la démarche.

3. Les élèves qui font confiance à l'Institution : ils pensent que si l'on utilise une autre méthode que celle de Bézout dans les programmes officiels, c'est sûrement parce qu'elle est meilleure!
Cette dernière réponse m'a surpris, elle n'a pas surpris mon collègue : il s'attendait à ce que certains s'en tiennent à la première méthode étudiée.

L'idée est donc venue de proposer l'année suivante l'étude de ce texte à la classe de spécialité, mais cette fois, avant que le professeur n'ait traité ce sujet.

Acte 2 : Dans la classe de TS spécialité de Mickaël Védrine en 2006.

C'est une classe d'une trentaine d'élèves, de niveau moyen.
Nous leur présentons brièvement Etienne Bézout et l'objectif de la séance : « Etudier une équation diophantienne à partir d'un document du XVIIIe siècle ce mathématicien. »
Les élèves n'ont pas encore abordé ce problème en cours.
Nous leur proposons alors l'activité suivante, élaborée en commun :

Attention, il est essentiel de ne pas lire le texte dans son intégralité au début de l'activité, mais de suivre scrupuleusement les étapes indiquées.

Voir le texte en annexe 3 (les lignes sont numérotées).

1° a. Lire les lignes 1 à 11.
b. Imaginer une méthode pour résoudre ce problème. (On ne demande pas de le résoudre effectivement.)

Déroulement :

La plupart des élèves transforment l'équation donnée en exprimant *y* en fonction de *x*. Certains ne vont pas plus loin, tandis que d'autres tracent la droite correspondante et cherchent les points de cette droite qui ont des coordonnées entières, mais l'exercice est peu précis, avec ces coefficients.
Un élève pense à utiliser les congruences : il constate que le problème revient à trouver *x* entier pour que le nombre $\frac{6x-3}{11}$ soit entier, mais il en déduit malheureusement que $x = 0{,}5$, donc que le problème est impossible. Il sera quand même satisfait de constater que la première étape de son raisonnement coïncide avec celle de Bézout. On le retrouvera dans son commentaire.

Commentaires :

C'est toujours une activité difficile, beaucoup d'élèves ont du mal à prendre des initiatives si le terrain n'est pas balisé. Ils se découragent très vite.
Il faut donc continuer :

2° a. Lire les lignes 12 à 20.
b. Une équation diophantienne est une équation linéaire à coefficients entiers, dont on cherche les solutions entières. Ainsi une équation diophantienne à deux inconnues est de la forme $ax + by = c$, avec a, b, c entiers. Dans ce problème, on se limite aux solutions naturelles.
Donner cinq couples solutions de l'équation diophantienne $t - 5s = 3$.

3° a. Lire les lignes 20 à 28 jusqu'au symbole &.
b. Vérifier que l'équation de la ligne 25 est équivalente à celle de la ligne 23.
c. Ecrire l'équation de la ligne 27 sous la forme d'une équation diophantienne.

d. Est-il aisé de trouver tous les couples solutions de cette équation ? Si oui, les donner.

4° a. Lire les lignes 28 à 40.
b. Vérifier tous les calculs de ce paragraphe.
c. Expliciter les équations diophantiennes successives obtenues par Bézout.
d. Est-il aisé de trouver tous les couples solutions de la dernière équation, comme l'affirme Bézout ?

5° a. Choisir deux valeurs pour *s* et en déduire les valeurs de *x* et *y* correspondantes. Ces valeurs répondent-elles au problème posé ?
b. Exprimer successivement les inconnues *t*, *u*, *x*, *y* en fonction de *s*.
c. Vérifier les réponses à la question précédente en lisant les lignes 41 à 51.

6° a. Lire la fin du texte.
b. Donner les trois couples de solutions qui suivent ceux donnés par Bézout.

Déroulement : (en 1h30)

Les élèves travaillent seuls ou avec leur voisin. Ils ne rencontrent pas de difficultés pour mener à bien la résolution du problème.

Commentaires :

Comme d'habitude, les élèves s'intéressent d'abord aux singularités de l'orthographe, puis ils se lancent dans la résolution proprement dite, avec un réel intérêt, dès qu'ils commencent à comprendre où Bézout les emmène. La réécriture des différentes équations diophantiennes intermédiaires facilite la compréhension de la démarche.
Cependant; les élèves ne voient pas de lien avec les congruences, et personne ne remarque que l'on retrouve, dans l'expression des solutions les coefficients 17 et 11 du départ.
On peut noter une réelle satisfaction, chez certains, d'avoir résolu le problème.

Devoir à faire sur feuille :

7° (D'après un problème d'annales)
Un astronome a observé, au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.
Soient *u* et *v* le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E1) : $35x - 27y = 2$.
Résoudre ce problème par la méthode de Bézout.

8° (Autre question posée par Bézout, c'est la « Question seconde », page 120 du l'ouvrage)
Faire 741 livres en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 livre, de 19 livres & de 10 livres.
On notera x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces.

a. Que vaut $x + y + z$? Que vaut $24x + 19y + 10z$?
b. En déduire que *y* et *z* sont solutions de l'équation $5y + 14z = 243$.
c. Résoudre cette équation par la méthode de Bézout.
d. En déduire toutes les solutions du problème.

Résultats :

7° Très peu d'élèves justifient ou tentent de justifier correctement l'équation (E1).
On cherche les entiers u et v tels que J1 = J0 + 6 + 81 u et J1 = J0 + 105 v.
D'où l'équation 105 v = 6 + 81 u qui conduit, après simplifications, à l'équation (E1).
La plupart, en revanche, obtiennent la bonne date : J0 + 735.
On obtient successivement :
$u = (35v - 2)/27$, $w = (8v - 2)/27$, $x = (3w + 2)/8$, $y = (2x - 2)/3$ et $z = y/2$, soit $y = 2z$.
D'où, en « remontant » : $v = 27z + 7$ et $u = 35z + 9$.
Il reste à faire $z = 0$ pour trouver la bonne date.

8° La première partie est bien traitée :
On obtient successivement :
$y = (243 - 14z)/5$, $u = (3 - 4z)/5$, $t = (3 - u)/4$, soit $u = 3 - 4t$.
D'où, en « remontant » : $y = 57 - 14t$ et $z = -3 + 5t$.
Mais les méthodes pour trouver les quatre solutions, sont très variées :
Certains cherchent les conditions sur t : y compris entre 0 et 41 impose t compris entre 2 et 4.
D'autres donnent des valeurs successives à t jusqu'à obtenir 4, qui donne une valeur de y négative. Ils s'arrêtent alors sans plus d'explication.
Ainsi, pour $t = 1$, quelques élèves obtiennent $y = 43$, sans remarquer que $y > 41$. ce n'est qu'en trouvant $x = -4$ qu'ils finissent par rejeter cette solution.
Beaucoup trouvent néanmoins les trois solutions : (5 ;29 ;7), (14 ;15 ;12) et (23 ;1 ;17).

Commentaires :

Comme dans l'autre classe, le travail a été fait sérieusement, mais la rigueur des raisonnements est insuffisante, tant dans la détermination des solutions, comme indiqué précédemment, qu'en cours de résolution : rares sont ceux qui ont rappelé la condition, pourtant essentielle, et répétée à chaque étape par Bézout : « Il faut donc que ce nombre soit entier. »

Deux semaines plus tard, la méthode « officielle » de résolution est présentée aux élèves.
Certains demandent s'ils pourront utiliser la méthode de Bézout le jour du Bac (Ils pensent même que cette activité et l'article qui suivra ont pour but d'imposer cette méthode le jour de l'examen !).
Compte tenu de la précision insuffisante des raisonnements, constatée à l'occasion du devoir à la maison, et craignant des réactions de rejets de certains correcteurs, le professeur le déconseille prudemment.
La semaine suivante, le professeur demande à chacun d'indiquer sa méthode préférée. Là encore, les élèves répondent avec beaucoup de sérieux (Voir annexe 6) et les arguments sont semblables à ceux de l'autre classe.

Bilan :

Il est incontestable que la méthode de Bézout a intéressé beaucoup d'élèves, la concentration lors des activités proposées en témoigne. Certains ont même mieux adhéré à la démarche proposée par Bézout, allant jusqu'à la recommander aux commençants.
L'une des raisons de la préférence pour la méthode « moderne » est sa rapidité, pourtant, l'algorithme d'Euclide comporte autant d'étapes que l'analyse du problème faite par Bézout.
Il faut s'interroger, en revanche, sur les doutes de certains élèves quant à la validité des raisonnements de Bézout. Dans la méthode actuelle, des théorèmes sont cités, ils sont souvent un gage de rigueur pour les élèves. Dans sa méthode, Bézout procède par analyse ou condition nécessaire mais sa « remontée » n'est pas identifiée clairement (à juste titre ?) par les élèves comme une réciproque. Il serait peut-être plus clair de remplacer dans l'équation, les inconnues par les valeurs des solutions exprimées en fonction du paramètre plutôt que de se contenter, comme le fait Bézout, d'affirmer qu'on « peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes,

qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de *x* & de *y*, au lieu de *s*, tous les nombres entiers positifs imaginables, depuis 3 jusqu'à l'infini. »
Ce type de raisonnement, par analyse et synthèse n'est pas reconnu par les élèves il est seulement utilisé en géométrie. Les élèves font le plus souvent des raisonnements par équivalence et ils confondent fréquemment « il faut » et « il suffit ».
C'est peut-être pourquoi beaucoup d'entre eux sont davantage rassurés par la méthode du cours dans laquelle ils identifient clairement deux étapes :
1. la détermination d'une solution particulière grâce à l'algorithme d'Euclide qu'ils ont découvert en classe de troisième et dont ils ont gardé un bon souvenir.
2. L'expression de la solution générale grâce à un …. théorème (qui plus est de Gauss, que l'on ne peut pas accuser de fantaisie.)
On pourrait quand même modifier quelque peu cette dernière de la manière suivante, sans savoir si cela ira dans le sens souhaité par quelques uns. :
1° Rechercher une solution particulière grâce à l'algorithme d'Euclide.
2° Rechercher la solution générale de l'équation sans second membre (qui s'exprimerait d'ailleurs plus simplement).
3° En déduire la solution générale de l'équation proposée.

Les élèves pourraient ainsi reconnaître une méthode déjà rencontrée lors de la résolution d'équations différentielles avec second membre.
Ce serait l'occasion d'observer que certains problèmes, touchant des domaines très différents, peuvent se résoudre par la même méthode, sans nécessairement aller jusqu'à parler d'espaces vectoriels.
Pour conclure, on peut reprendre l'expression d'un élève « Comme d'habitude, il n'y a rien d'absolu » et penser que la méthode de Bézout peut être une bonne introduction (ou une bonne remédiation) à la résolution des équations diophantiennes.

Acte 3 : Dans la classe de 2nde de Jean Terreran en 2005

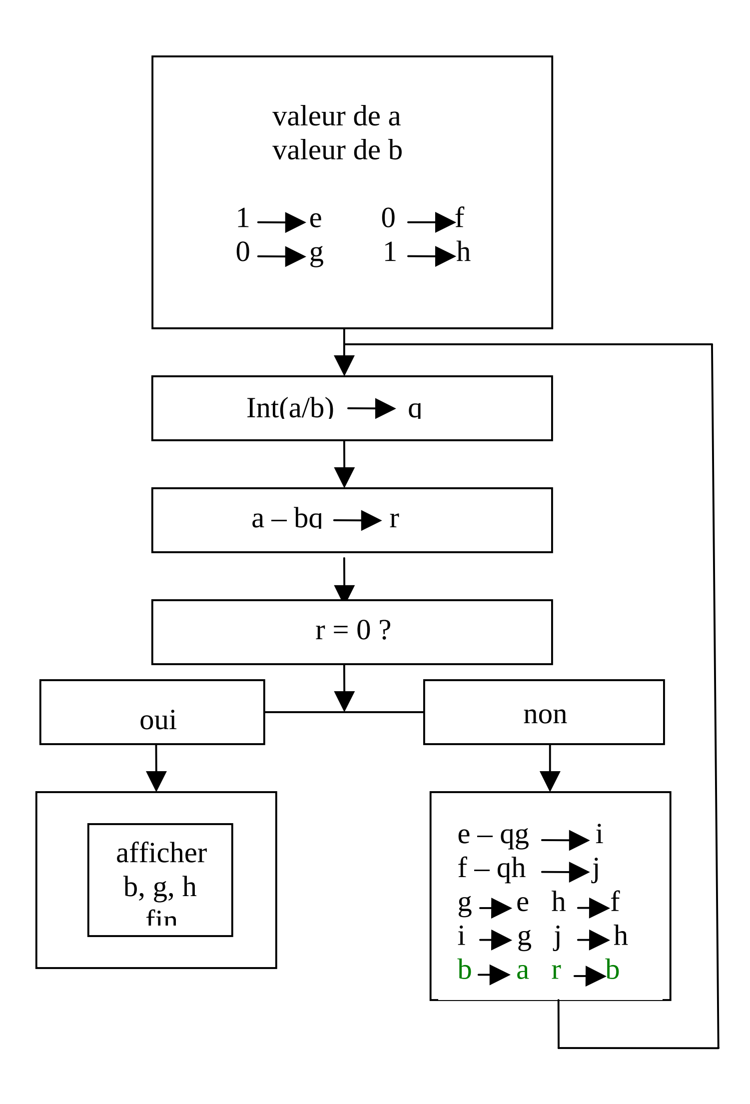
C'est une classe spécialité Arts Plastiques de trente deux d'élèves, de niveau moyen. Ils ont déjà travaillé sur des textes ou des méthodes historiques (La perspective leur a notamment été présentée conjointement par les professeurs d'Arts Plastiques et de Mathématiques).
Cette tentative s'est soldée par un échec : seuls trois élèves (d'un très bon niveau) ont étudier un document voisin de celui présenté en annexe 1. Les autres ont buté dès la première étape : Pourquoi (et comment) extraire la partie entière $x - 49$ de $17x - 542/11$ et pourquoi faut-il que $6x + 3/11$ soit entier ? On observe à cette occasion que la division euclidienne n'est pas encore entièrement maîtrisée.
Après cet échec, l'interprétation graphique du problème n'a pas permis de remotiver des élèves vite découragés.
Peut-être que la réécriture des équations diophantiennes obtenues à chaque étape du raisonnement éclairerait celui-ci ? A moins que ce ne soit décidément trop difficile à ce niveau ?

Annexe 1 : Algorithme et organigramme

Nous appellerons a et b les deux nombres initiaux (ici 17 et 11).

(e,f) sont les coordonnées de a et (g,h) celles de b qui expriment a et b en fonction de a et b :
a = a e + b f et b = a g + b h.
Au début, a = a.1 + b.0 et b = a.0 + b.1.
q est le quotient de la division de a par b, et r est le reste.
r = a – bq = a(e – qg) + b(f – qh), ces coordonnées sont notées i et j dans l'organigramme.

(la flèche ⟶ permet d'affecter une valeur).
A la fin, r = 0 et le reste précédent est le Plus Grand Diviseur Commun de a et b, il est affecté à b.
g et h sont alors les coefficients u et v cherchés (ici : 1 = 2×17 – 3×11).



Annexe 2 : Le document-élèves.

TS spé (05-06)	**T.D. Une équation diophantienne résolue par Bézout**	**Ven. 20.01.06**

Objectifs :

Etudier une équation à deux inconnues à partir d'un document du XVIIIe siècle d'Etienne Bézout.

Activité

Etienne Bézout est un mathématicien français né en 1730 à Nemours, où le lycée porte son nom, mort en 1783 aux Basses-Loges (près de Fontainebleau).
Il a enseigné dans une école militaire et à écrit un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine (en cinq tomes).

1° Lire le texte page 2 et compléter les pointillés en effectuant les calculs nécessaires, au fur et à mesure.

2° a. Pourquoi était-on sûr, à l'avance, de trouver des solutions au problème ?

b. Les divisions euclidiennes successives utilisées par Bézout sont :

* 17 = 11x1 + 6
* 11 = 6x1 + 5
* … = …………

Quel méthode Bézout utilise-t-il ? …………………………………………………………..

c. Résoudre l'équation $17x – 11y = 542$ par la méthode étudiée en cours.

Trouve-t-on les mêmes solutions ?

à résoudre sur feuille pour vendredi 27 janvier :

3° Le but du problème est de :

Faire 741 livres en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 livres, de 19 livres & de 10 livres.

Pour cela :

Soient x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces.

a. Que vaut x + y + z ?
Que vaut 24x + 19y + 10z ?

b. En déduire que y et z sont solutions de l'équation 5y + 14z = 243.

c. Résoudre cette équation par la méthode de Bézout.

d. En déduire toutes les solutions du problème.

4° De la méthode de Bézout et de la méthode vue en cours, y en a-t-il une que vous préférez ? Pourquoi ?

COURS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON

ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aspirants du Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

tome 2. page 118

Question premiere. *On demande en combien de manieres on peut payer 542 livres, en donnant des pieces de 17 liv. & recevant en échange des pieces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre de pieces de 17 liv. & par y celui des pieces de 11 liv. en donnant x pieces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pieces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé ....; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura .... Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y =$ ....

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier ; on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x =$ ....; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier ; on aura ..... $= t$, & par conséquent $5u + 3 =$ ..., & $u =$ .... ; il faut donc que $\frac{t - 3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura .... $= s$, & par conséquent $t =$ ...... : l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t - 3}{5}$; en mettant

H iv

pour t sa valeur $5s + 3$, on aura $u =$ ...... $=$ .... ; & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u + 3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x =$ .... $=$ .... enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x - 542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y =$ .... $=$ ....; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la premiere, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que ... ; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que ..., ou que s soit plus grand que ..., c'est-à-dire, plus grand que ...

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manieres différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini ; ainsi posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c. on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$x = 39$ ...,	$y = 11$
$= 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$, &c.	$= 79$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pieces de 17 liv. désigné par x, & recevant le nombre correspondant de pieces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 livres.

Annexe 3 :

COURS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aspirants du Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

tome 2. page 118

Question premiere. *On demande en combien de manieres on peut payer 542 livres, en donnant des pieces de 17 liv. & recevant en échange des pieces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre de pieces de 17 liv. & par y celui des pieces de 11 liv. en donnant x pieces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pieces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation ; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier ; on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier ; on aura $\frac{5u + 3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$, & $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$; il faut donc que $\frac{t - 3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t - 3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t - 3}{5}$; en mettant

H iv

pour t sa valeur $5s + 3$, on aura $u = \frac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$; & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u + 3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x - 542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la premiere, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manieres différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini ; ainsi posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c. on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$x = 39$ . . . ,	$y = 11$
$= 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$, &c.	$= 79$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pieces de 17 liv. désigné par x, & recevant le nombre correspondant de pieces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 livres.

Annexe 4 : Où « comment Bézout raccourcit sa méthode »

pages 123 – 124 du cours de Bézout.

Dans le cours des diviſions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre

le quotient plutôt au-deſſous de ſa véritable valeur, qu'au-deſſus. Il eſt même quelque-fois plus expéditif de le prendre de cette derniere maniere.

Par exemple, ſi j'avois l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure $y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19}$ en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ diviſé par 19, en nombres entiers, je conclurois $y = 3x + 7 \frac{-5x + 6}{19}$ en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient eſt plus approchant, & que l'excédant $5x$ dont je tiens compte en lui donnant le ſigne $-$, a un coëfficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais enſuite $\frac{-5x + 6}{19} = u$; & j'en conclus $x = \frac{6 - 19u}{5}$, & par la même raiſon, $x = 1 - 4u + \frac{1 + u}{5}$. Faiſant $\frac{1 + u}{5} = t$, j'ai enfin $u = 5t - 1$; ce qui acheve la ſolution plus promptement que ſi j'avois pris chaque quotient au-deſſous de ſa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-deſſus, aux valeurs de x & de y, on trouvera $x = 5 - 19t$, & $y = 21 - 52t$, qui en donnant à t pour valeurs, tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les ſolutions poſitives de l'équation.

Annexe 5 : Avis des élèves sur les deux méthodes de résolution :
Quand le cours a été traité avant Bézout :
* : Bézout plus facile à mettre en œuvre.
* : La méthode que je préfère est la méthode vue en classe, car c'est la première acquise par l'esprit et donc la première utilisée lors d'un problème. Cependant la méthode de Bézout est utile si l'on veut faire la démonstration à quelqu'un qui ne sait aucune des deux car elle est plus simple à comprendre, mais plus longue.
* : Je comprends mieux la méthode vue en cours.
* : Des deux méthodes, je préfère celle vue en cours car elle est plus simple et plus rapide. De plus, si c'est celle qu'apprennent les élèves, c'est logiquement la meilleure des deux.
* : Je préfère la méthode du cours car je la trouve plus courte et plus simple à utiliser.
* : Même si la méthode de Bézout est intéressante et a des calculs simples à effectuer, je préfère la méthode du cours car elle est beaucoup plus courte.
* : Je préfère la méthode vue en cours car on n'a pas besoin de changer autant de fois de variable.
* : J'ai tendance à préférer la méthode de Bézout, en effet cette méthode nous permet d'obtenir directement le couple solution. Les erreurs de signes sont moins probables, et cette méthode permet des vérifications à chaque pas. Un bémol cependant, cette méthode ne permet pas de calculer le Plus Grand Commun Diviseur, nous ne savons pas si la solution que nous devons cherche rexiste.
* : Finalement je préfère la méthode vue en cours à celle de Bézout. En effet, bien que ces deux méthodes utilisent des cheminements logiques, le méthode de Bézout m'apparaît beaucoup plus fastidieuse par l'utilisation d'inconnues successives, dont le nombre varie selon la complexité du quotient. L'application de Bézout me semble alors être davantage propre à chaque équation, tandis que la méthode vue en cours est, selon moi, plus générale, notamment par une utilisation d'un nombre constant d'inconnues (qui sont toujours du type x, y, a, b, x0, y0, X, Y).
* : Je préfère la méthode vue en cours parce qu'elle est plus rapide.
* : Je préfère la méthode vue en cours, que j'ai assimilée en premier, à la méthode de Bézout plus tortueuse tant qu'on ne trouve pas de nombre entier, et qui fait intervenir plus d'inconnues, difficiles à replacer dans la formule.
* : Je préfère la méthode vue en cours, que je trouve plus claire. Je trouve en effet que la méthode de Bézout est un peu longue et complexe à cause de la succession d'inconnues, surtout qu'il faut, une fois qu'on a trouvé l'entier, remonter dans l'autre sens pour exprimer en fonction de la dernière inconnue trouvée.
* : Pour ma part, je préfère la méthode de Bézout, certes elle est plus longue, mais je trouve qu'elle est plus simple à comprendre pour quelqu'un qui n'a encore jamais vu les équations diophantiennes.
* : Des deux méthodes, je préfère la méthode de Bézout car je trouve que l'on trouve plus vite les solutions générales qu'avec la méthode vue en cours.
* : Je préfère la méthode vue en cours car celle-ci est plus rapide que celle utilisée par Bézout.
* : Personnellement, je préfère la méthode vue en cours car je l'ai trouvée moins longue que celle de Bézout, mais il n'empêche que j'ai trouvé celle de Bézout intéressante à étudier.
* : Je préfère la méthode vue en cours car elle est plus simple et plus facile à retenir.
* : Personnellement, je préfère la méthode de Bézout, elle est certes plus longue à cause de la démultiplication du problème, mais plus simple à mes yeux.
* : Je préfère la méthode utilisée en cours à celle de Bézout (bien que cette dernière soit intéressante) car je trouve la trouve plus courte.

Annexe 6 : Avis des élèves sur les deux méthodes de résolution :

Quand le cours a été traité après Bézout :

* La méthode 1, celle de Bézout, était plutôt intéressante à faire, divertissante, sympa à connaître, mais un peu longue et le risque d'erreur, pour ma part, est plus grand avec cette méthode qu'avec l'autre. L'autre est plus rapide et comme c'est celle que l'on doit connaître, eh bien c'est celle que je maîtrise le mieux, je pense.

* : Je préfère la méthode du cours parce que je l'ai mieux comprise, même si elle paraît être légèrement plus longue. Ainsi, je la préfère car, pour ma part, j'ai moins de chance de faire des erreurs.

* Je préfère la méthode vue en cours car l'ayant déjà vue l'année dernière en classe de terminale, il est plus facile pour moi de me souvenir de celle-la plutôt que d'en apprendre une nouvelle.

* Je préfère la méthode du cours, c'est pourquoi je lègue mon vote à la méthode du cours.

***** Comme toujours, rien n'est absolu, la méthode de Bézout a le mérite d'être simple à appliquer, avec un minimum d'habitude, je pense qu'il doit être très aisé de trouver les solutions. Cependant l'autre méthode donne une expression des solutions assez claire, et pour peu qu'on trouve des solutions évidentes, elle est finalement beaucoup plus rapide. Tout dépend donc des cas. Je pense que je préfère la méthode du cours.

* Je préfère la nouvelle méthode car elle est plus courte. L'ancienne est plus longue, mais elle fait appel à moins de justifications.

* Je préfère la méthode actuelle car elle est plus rapide, mais elle demande plus de justifications que l'ancienne est plus longue, mais elle fait appel à moins

* Je préfère la nouvelle méthode de Bézout car l'ancienne est plus longue, il y a plus de calcul, alors qu'avec l'autre, on a juste à faire l'algorithme d'Euclide et à faire des remplacements.

* Ma méthode préférée est la n°2, car elle est plus structurée que la première et donc plus simple à assimiler. De plus, elle permet de réellement trouver toutes les solutions (entières) de l'équation avec le justification qui convient.

* Je trouve que la méthode de résolution des équations diophantiennes est plus simple, l'enchaînement est clair et précis. Elle est certes plus longue, mais elle est plus claire pour moi.

* Préférence : la méthode de Bézout car meilleur manipulation. Méthode du cours moins connue, mais plus simple pour résoudre les problèmes.

* La méthode de Bézout est très bien pour trouver des solutions aux équations diophantiennes, mais je la trouve trop longue et nous ne sommes pas sûrs de trouver des solutions entières. La deuxième méthode, celle d'établir les restes des divisions euclidiennes est très bien aussi, mais celle-ci est très rigoureuse et l'énonciation du théorème de gauss est bien justifié, c'est pour cela que je préfère cette méthode à celle de Bézout.

* La méthode de Bézout est longue, et dans le cas où il n'y a pas de solutions, on ne le voit pas out de suite. La deuxième méthode est longue aussi mais avec une solution évidente, c'est déjà plus court. Un tableau de congruences ce serait encore mieux : ax + by = c *équivaut à* x = c – by/a, c'est-à-dire c – by congru à 0 [a].

* Je préfère la deuxième méthode car elle est moins longue et moins fastidieuse.

* La première méthode me paraît plus intéressante car elle est plus pratique que théorique.

* Je préfère la deuxième méthode avec les solutions particulières qui est plus facile à comprendre, et une fois qu'on l'a apprise, elle est assez facile à refaire si on ne fait pas d'erreur de calcul.

* La deuxième méthode est plus facile à faire et à comprendre et est plus rapide que la première.

* Méthode n°1 : je la trouve assez longue. Impression que l'on ne sait plus où on en est.
  Méthode n°2 : plus simple, moins fastidieuse, donc je préfère la deuxième méthode.

* Je trouve que la première méthode est plus « intéressante » que la seconde et que l'on voit beaucoup plus où l'on veut en venir. Ensuite pour arriver au résultat on utilise toujours le même principe, tout au long du raisonnement. Au contraire, la seconde méthode mobilise plus de connaissances (théorème de Gauss, de Bézout) et sa rédaction est plus rigoureuse (dans le sens où il faut faire la réciproque…).

* Le cours sur la méthode de Bézout permet de découvrir les équations diophantiennes pas à pas et de manière autonome. Néanmoins j'ai une préférence pour la méthode « moderne » qui me paraît plus peut être intéressante, simple et plus complète.
* La méthode de Bézout car c'est une autre façon de procéder, mais je la trouve trop longue pour résoudre les équations diophantiennes. La méthode actuelle me semble moins longue et plus facile. Mais je pense qu'il est intéressant de voir les deux méthodes.
* Méthode de Bézout : c'est une bonne méthode, simple à mettre en œuvre mais trop linéaire, elle mous rend passif et induit des erreurs d'inattention. De plus, le nombre de variables étant trop grand, il est facile de s'embrouiller.
Méthode actuelle : plus rapide, tout aussi efficace et diversifiée, on ne s'ennuie pas avec et on n'est pas submergé par les variables, et c'est plus facile à programmer.
* Je sais utiliser les deux mais la méthode avec Gauss me paraît plus pratique car plus rigoureuse et rapide.
* Les deux méthodes sont assez longues. Mais la méthode vue en cours avec l'algorithme d'Euclide me semble plus simple, car avec la méthode de Bézout cela prend vite une page de calculs, avec l'autre on peut simplifier s'il existe des racines évidentes.
* La méthode de Bézout est efficace mais assez longue à faire et à écrire. La méthode n°2 est préférable car elle est plus simple.
* J'ai préféré la deuxième méthode qui est à mon avis plus rapide, plus complète.
* Je pense que la méthode de Bézout est beaucoup trop longue et il y a des chances de se tromper dans les nombreuses variables que l'on pose. La méthode actuelle est beaucoup plus simple et ne comporte pas de grande difficulté et surtout, elle est beaucoup plus rapide à exécuter et la présentation est plus jolie. Donc je pense que cette méthode est meilleure.
* Certes la méthode de Bézout est simple, plus facile, mais la deuxième méthode, en étant plus longue et un peu plus complexe est selon moi la meilleure car il y a là un vrai raisonnement. On explique ce qu'on fait alors que la méthode de Bézout est une suite de calculs où il est plus difficile d'expliquer ce qu'on fait et pourquoi.
* Pour résoudre ce type d'équations, la méthode moderne me paraît plus simple, et je pense que l'on a moins de risque de faire des erreurs.
* Le théorème de Bézout est pour moi plus simple et plus rapide car il n'y a pas la nécessité de calculer le Plus Grand Commun Diviseur avec l'algorithme d'Euclide et non plus besoin de se resservir de cet algorithme pour trouver le couple de solutions évidentes.

Inscrire un triangle équilatéral dans un carré
Une activité de collège ? de lycée ? de spécialiste ?

***Marie-Noëlle Racine**, professeure lycée le castel, Dijon*

Inscrire un triangle dans un carré. Facile ! Inscrire un triangle équilatéral dans un carré. C'est déjà moins facile ! Si vous tentez quelques figures sur papier, vous pouvez trouver quelques solutions en plaçant un sommet du triangle au milieu d'un côté du carré (voir figure 5), ou, comme Marolois, en plaçant un sommet du triangle sur un sommet du carré (voir figure 152 ci-dessous). Ces solutions sont des cas particuliers faisant apparaître des propriétés de symétrie axiale. Mais, peut-on obtenir un triangle équilatéral inscrit dans un carré en plaçant un sommet du triangle sur un point quelconque d'un côté du carré ? Et, les solutions trouvées (on en a déjà deux) sont-elles toutes isométriques ?

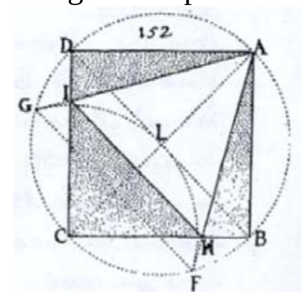
Il m'a semblé intéressant de poser la première question à mes élèves de 1L option maths.

En 2005, au programme de l'option, figurent moult notions de géométrie plane, constructions, résolutions de petits problèmes et énoncés des justifications des étapes successives. Ayant déjà terminé la partie cours et exercices, je décide de préparer un sujet que je donnerai en devoir surveillé lors des épreuves longues.

L'énoncé proposé aux élèves et reproduit en annexe 1 comporte une brève partie de présentation de l'ouvrage dont est tirée la proposition, ainsi que l'exposé des motifs et, donné in extenso, le texte de la proposition elle-même, de la description de la figure et, en annexe au devoir, une reproduction du livre (texte et figure associée, cf annexe 1 de cet article).

La description permettra aux élèves de reproduire la figure, question a, ce que 71% des élèves ont parfaitement réussi, malgré certains mots un peu désuets employés par Marolois (les deux autres élèves, sur sept au total, n'ayant absolument pas abordé cet exercice de géométrie).

La démonstration demandée en b devait permettre de justifier la validité de la construction (mes collègues consultés ont d'ailleurs trouvé cette validation difficile et ont proposé des solutions en annexe 2). Seules trois élèves (sur les cinq qui ont commencé l'exercice) ont abordé cette démonstration, avec plus ou moins de bonheur. Elles n'ont pas persévéré, c'était le dernier exercice de leur premier devoir de trois heures (comme au bac), pourtant certaines élèves sont sorties en avance, pensant qu'elles avaient suffisamment bien travaillé pour le reste du devoir ! Aucune n'a su donner tous les arguments pour valider la construction.



Les droites (GF), (IH), (DB), ayant l'air parallèles, ont fait envisager d'utiliser le théorème de Thalès ; ou bien le cercle tracé a fait penser à des angles inscrits ; ou bien encore, avec toujours les droites (IH), (GF), mais cette fois perpendiculaires à (AC) et avec des longueurs égales, il y a, sans la citer, l'idée de (AC) axe de symétrie de la figure.

Une élève se placera aussi dans un cas particulier avec la médiane des côtés du carré -droite joignant les milieux- (au lieu de la diagonale AC) comme axe de symétrie de son triangle équilatéral solution dans la question c (voir figure 5). Mais aucun des arguments avancés n'était étayé et aucun élève n'a pu conclure.

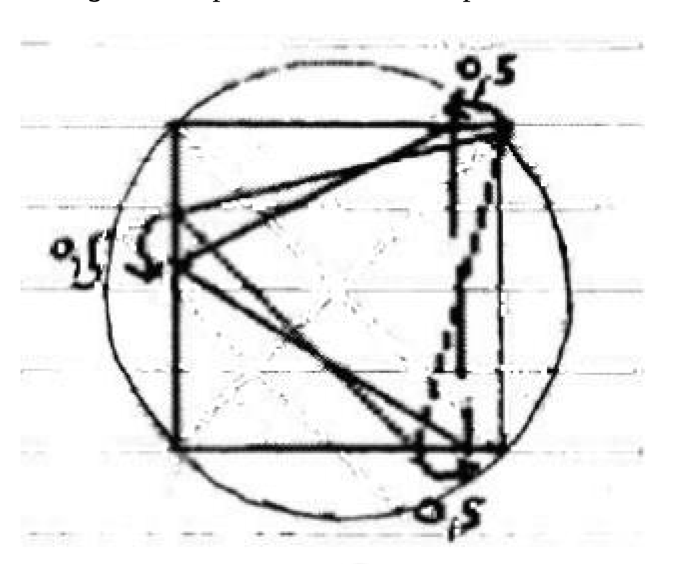
Pourquoi ont-elles eu du mal à démontrer que les triangles AGF et AIH sont équilatéraux ?

- je l'ai déjà dit, c'était le dernier exercice d'un devoir long et les élèves ne sont pas habituées à « chercher » aussi longtemps : c'est le premier devoir de trois heures en maths, ce ne sont pas des spécialistes bien qu'elles aient choisi l'option. Travailler, et réussir à peu près, de manière intense pendant 2 heures, cela leur a paru suffisant pour obtenir une note « correcte » au devoir surveillé.
- étant en section littéraire, elles n'imaginaient pas devoir justifier comme cela lors d'un devoir. Elles acceptent de le faire en cours mais sont réticentes en ce qui concerne les devoirs surveillés.
- les élèves sont habituées à chercher oralement, à discuter entre elles, mais cette activité est différente d'une recherche écrite. Dans les devoirs maison, elles ont pu penser les choses au fur et à mesure, se poser des questions, m'en poser tout au long d'une semaine avant de me rendre le devoir.
- la construction leur a été dictée, elles n'ont pas eu à l'inventer et ont eu du mal à identifier les hypothèses des propriétés qu'elles « voyaient ».

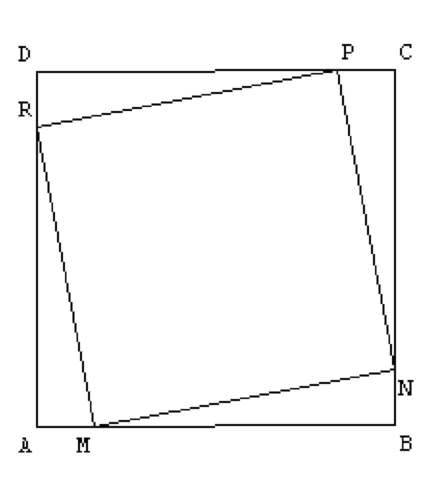
Alors, que faire ? Dois-je les forcer à rédiger une démonstration comme elles en ont fait jusqu'à présent ? Celle-ci était-elle hors de leur portée et devais-je les guider ? Je choisis cette deuxième solution et on fait une recherche orale en classe puis une synthèse. Je préfère qu'elles concentrent leur énergie sur la troisième question, facultative lors du contrôle, pourtant abordée par les élèves les plus dynamiques en cours.

Pour cette question c, il y a des essais comme :

Figure 1, reproduction de la copie d'élève



Inspiré de (figure2)



L'élève qui a proposé la figure 1 ci-dessus a tout de suite su me dire, quand j'ai rendu le devoir, que sa méthode ne convenait pas ici. Preuve qu'elle avait réfléchi, mais sans approfondir, en rentrant chez elle, sur son dessin fait « à la va-vite » pendant l'épreuve longue. On exhibe d'ailleurs rapidement un contre-exemple (voir figure 3 ci-dessous)

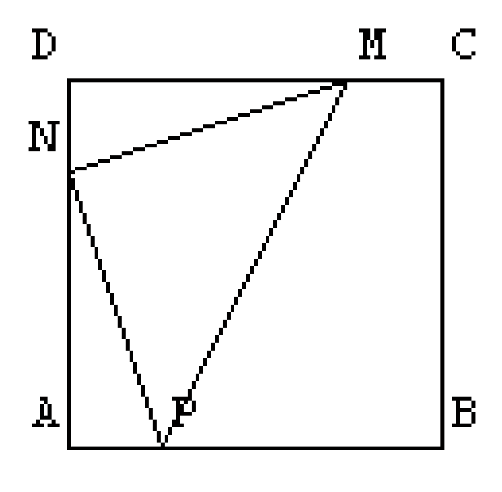


Figure 3

Une autre élève a réussi au « pifomètre », mais sa figure (voir la reproduction ci-dessous) est tout de même intéressante car cela donne à penser qu'il est possible de tracer un triangle équilatéral inscrit dans le carré en se fixant un sommet M quelconque sur [AB] :

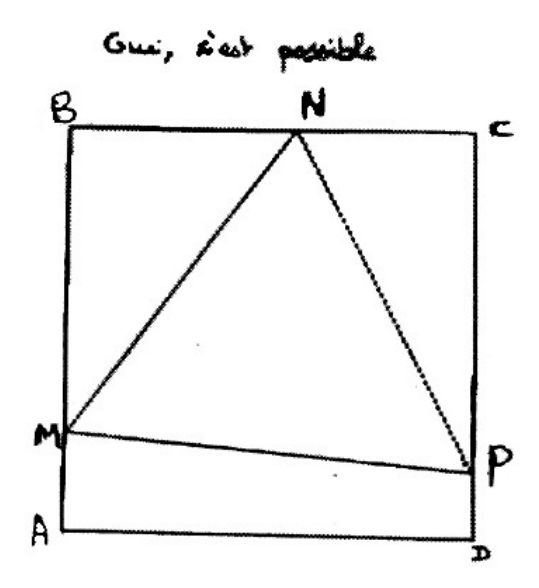


Figure 4, reproduction de figure d'élève

Je donne le problème à chercher pour la fois suivante. Mais les résultats des recherches ne sont guère satisfaisants. Les élèves n'ont fait qu'un seul essai et s'en sont contentées : les sommets du triangle ne sont pas quelconques sur les côtés du carré, l'un est au milieu d'un côté et les deux autres sont tels qu'un côté du triangle est parallèle à un côté du carré.
Quoiqu'il en soit, elles ont cherché, trouvé et sont contentes d'elles.

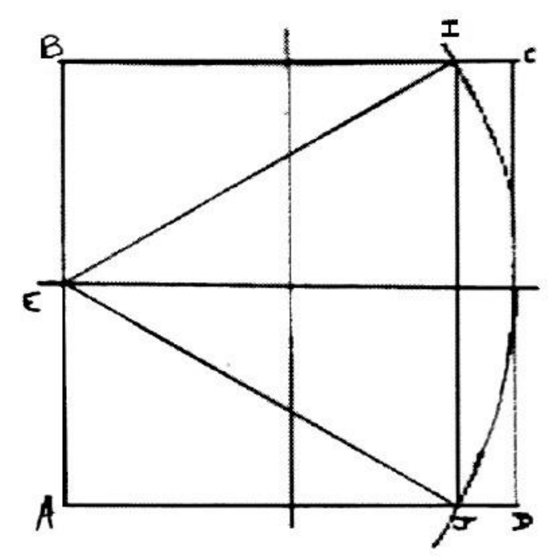


Figure 5 : exemple de figure d'élève

Aurait-il fallu que je donne encore d'autres consignes pour éviter ce cas ? Je n'ai pas voulu le faire et l'exercice s'est arrêté là.
A posteriori, je pense qu'on pourrait organiser une séquence de recherche en utilisant les logiciels de géométrie, pour que les élèves tâtonnent en déplaçant des points sur les côtés, ou qu'ils cherchent un triangle semblable à un triangle qui n'aurait que deux sommets sur deux côtés consécutifs du carré, ou sur deux côtés opposés du carré, triangle qui répondrait complètement à la question posée.

Quelle que soit la position de M sur [AB], il est possible de construire N et P sur deux des autres côtés du carré, tels que le triangle MNP soit équilatéral. La construction sur papier étant ensuite à rechercher. Le logiciel permet de prouver qu'une solution existe, mais ne donne pas le moyen de la « construire ». C'est un travail qui sera mené une prochaine année avec des élèves (voir en annexe 3 des pistes de travail). Par ailleurs, grâce à plusieurs solutions trouvées, on constaterait rapidement que les triangles équilatéraux inscrits dans un carré ne sont pas tous isométriques.

Conclusion :
reproduire une figure, même avec un texte contenant un vocabulaire désuet pour nos élèves du XXIe siècle, est tout à fait un exercice à la portée de nos jeunes. Réfléchir à une construction, est un exercice encore apprécié, mais démontrer et rédiger reste un art peu prisé, que nos élèves pensent réservé à une élite scientifique. Il a fallu, pour ces littéraires, que j'insiste, tout au long des deux années que j'ai passées avec elles (1ère et Terminale en 2005 & 2006), sur la rédaction. Toutefois, je me suis chaque fois contentée, pour laisser aux élèves le plaisir de la recherche et de la découverte, de ne demander la rédaction que pour quelques questions, et non pas systématiquement. Notamment, je me suis souvent contentée de demander de laisser les traits de construction qui me permettaient de comprendre la démarche des élèves sans les obliger à rédiger une démonstration rigoureuse.
Utiliser ce texte du XVIIe siècle a permis de poser un problème aux élèves et de leur faire chercher une solution. Utiliser ce texte a aussi permis de donner une solution simple, dans un cas particulier, ce qui aide les élèves qui ne voient pas quel est le problème ou qui se découragent vite. Néanmoins, le plaisir de faire des mathématiques, c'est le plaisir de trouver, ou au moins celui d'essayer des pistes de recherche. C'est ce qu'ont vécu mes élèves, pour deux d'entre elles lors du devoir surveillé et, pour les autres, lors du corrigé (quand il s'est agi de trouver des contre exemples aux solutions avancées, notamment), ou à la maison. Même s'il a été frustrant pour moi d'arrêter la recherche après le deuxième cas particulier donné par les élèves, une autre solution que celle de Marolois a été trouvée par les élèves et l'activité leur a bien plu.

ANNEXE 1 : 2 pages manuscrites d'énoncé

Exercice 4:

Dans une " Géométrie " pratique parue en 1616, le mathématicien Samuel Marolois explique, dans la proposition 50, s'appuyant sur la construction 152, comment inscrire un triangle équilatéral dans un carré.



« proposition, 50.
Dans un quaré inscrire un triangle equilateral.
Construction. 152.
Soit le quaré A B C D. dans lequel on veult inscrire un triangle equilateral et equiangle. Soyent tirees les Diagonales AC. et BD. s'entrecoupans en L. du centre L. a la distance LA. soit descript le cercle A B C D. soit aussi icelle distance mise de C. sur la circonference en G. et en F. [...] et desdits points G. et F. du point A soyent tirees les lignes A, F. et A, G. qui couperont le quare aux points H. et I. et diceux tiree la ligne H, I. sera trouve le triangle requis. Qu'il soit ainsi il apart par ce que le coste G, F. estant parallèle au coste HI. que le triangle AGF. est proportionelle au triangle AHI. [...] »

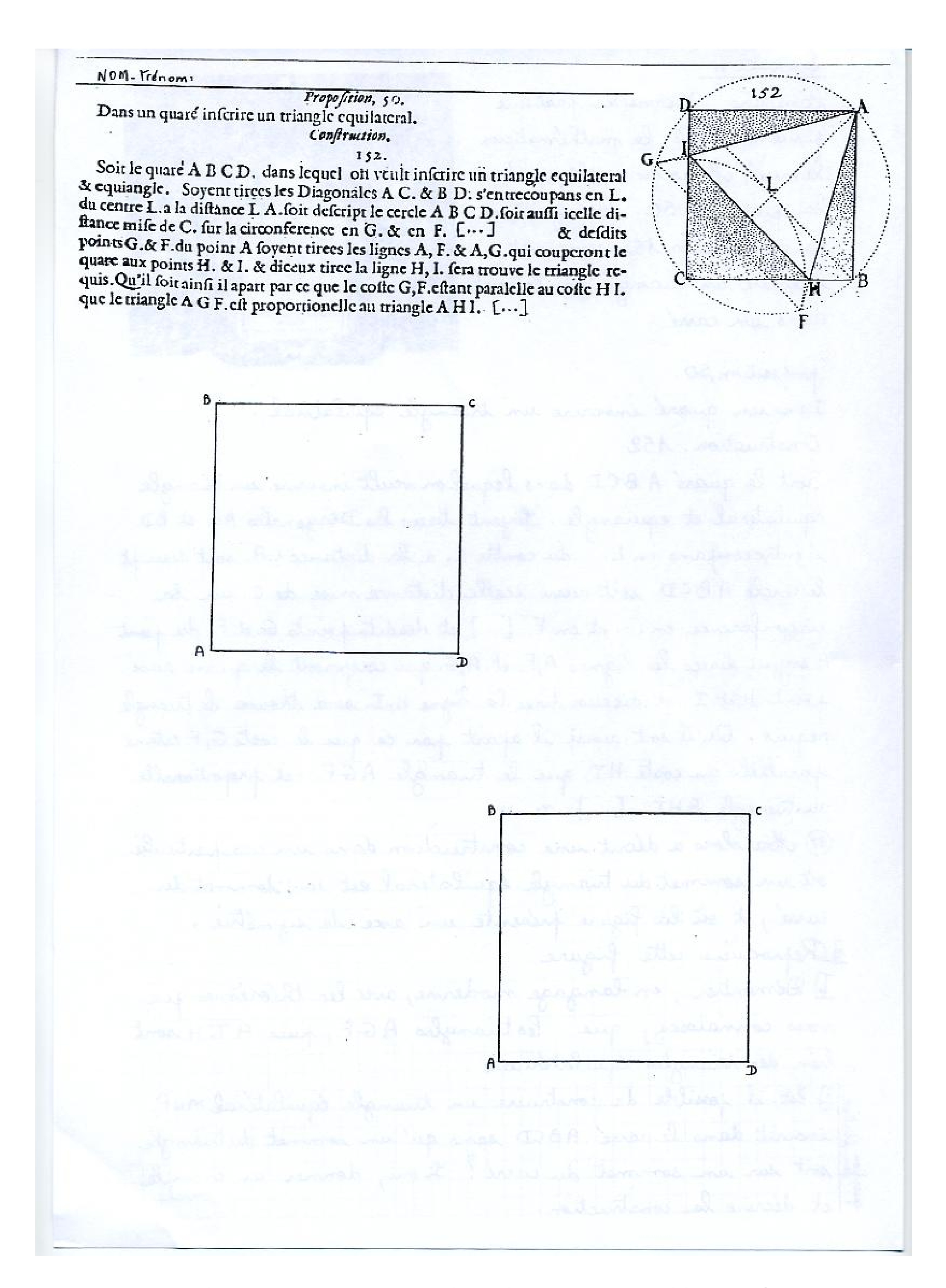
① Marolois a décrit une construction dans un cas particulier où un sommet du triangle équilatéral est un sommet du carré, et où la figure présente un axe de symétrie.

a) Reproduire cette figure

b) Démontrer, en langage moderne, avec les théorèmes que vous connaissez, que les triangles A G F, puis A I H sont bien des triangles équilatéraux

question facultative

c) Est-il possible de construire un triangle équilatéral MNP, inscrit dans le carré ABCD sans qu'un sommet du triangle soit sur un sommet du carré ? Si oui, donner un exemple et décrire la construction.



NOM-Prénom :

Propofition, 50.

Dans un quaré infcrire un triangle equilateral.

Conftruction.

152.

Soit le quaré A B C D. dans lequel on veult infcrire un triangle equilateral & equiangle. Soyent tirees les Diagonales A C. & B D. s'entrecoupans en L. du centre L. a la diftance L A. foit defcript le cercle A B C D. foit auffi icelle diftance mife de C. fur la circonference en G. & en F. [...] & defdits points G. & F. du point A foyent tirees les lignes A, F. & A, G. qui couperont le quare aux points H. & I. & diceux tiree la ligne H, I. fera trouve le triangle requis. Qu'il foit ainfi il apart par ce que le cofte G, F. eftant paralelle au cofte H I. que le triangle A G F. eft proportionelle au triangle A H I. [...]

Remarque : les carrés ABCD construits sur l'énoncé permettent aux élèves de faire des essais sans avoir à construire ces susdits carrés, ce qui leur permet de se concentrer sur le problème à résoudre.

ANNEXE 2 : Commentaires et solutions :

Question 1a : *reproduire cette figure*

Certes, la figure est donnée page suivante, mais il n'est pas inutile de demander aux élèves de la reproduire car le langage de Marolois n'est pas leur langage habituel et d'autre part, ils se familiarisent mieux avec les hypothèses.

Question 1b : un exemple de solution à proposer :

Les deux cercles de la figure sont de même rayon r, de centres respectifs L et C, la droite (LC), c'est-à-dire aussi (AC) est axe de symétrie de la figure et F est le symétrique de G, de même, en ajoutant que (AC) est aussi axe de symétrie du carré ABCD, H et I sont symétriques par rapport à (AC).

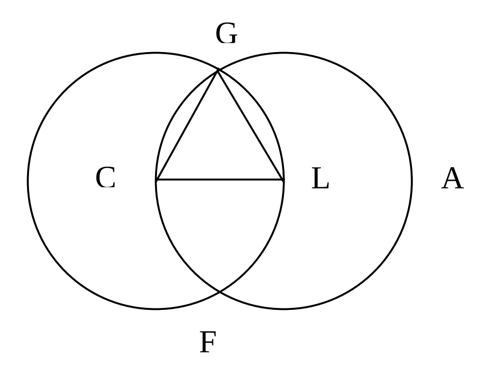


Figure 6, (figure-clé, extraite de la figure 152)

AFG est tel que AF=AG. De plus, FCL et GCL étant équilatéraux (c'est toujours la figure classique –voir ci-dessus- avec deux cercles de centres respectifs L et C, de mêmes rayons, sécants en F et G), l'angle au centre FLG mesure 120° et l'angle inscrit FAG mesure 60°. Le triangle AFG est équilatéral, de même que le triangle AHI (isocèle de sommet A et ayant un angle de 60°)

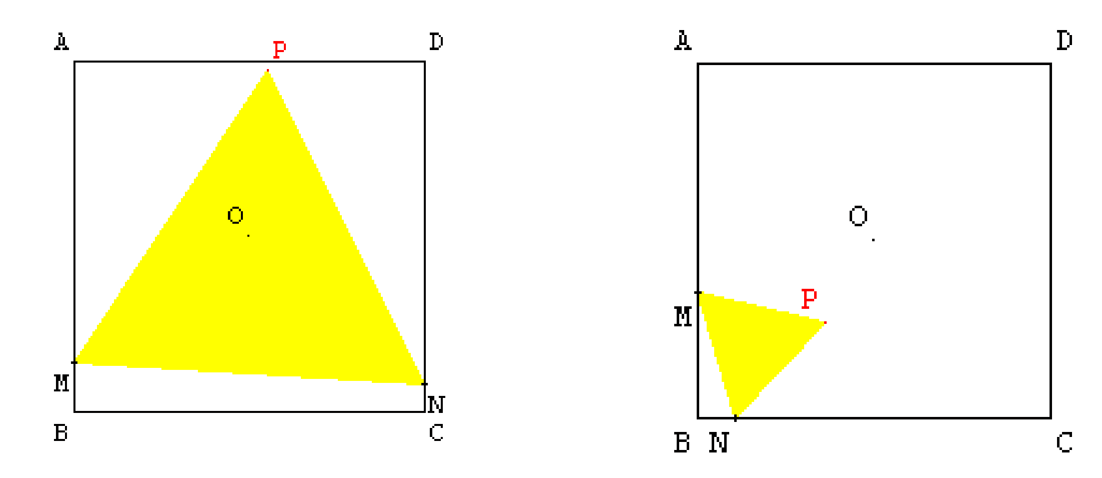
AHI est donc un triangle solution du problème puisqu'il est équilatéral, inscrit dans le carré ABCD.

ANNEXE 3 : Diverses solutions obtenues avec GEOPLAN ou CABRI :

Sur GEOPLAN : la figure qui suit a été conçue avec l'aide de Sylvie Lanaud, professeure au collège Bachelard à Dijon.

Historique de la figure	*commentaire*
O point libre	*On construit un carré ABCD de centre O*
A point libre	
B image de A par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
C image de B par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
D image de C par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
M point libre sur la droite (AB)	*Ces points M et N pourront se déplacer sur les côtés [AB] et [BC] (et même sur les droites (AB) et (BC), en dehors du carré)*
N point libre sur la droite (BC)	
P est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle 60 (degrés)	*On a les 3 sommets d'un triangle équilatéral MNP pour lequel M et N sont sur les côtés du carré ABCD*
T1 est le polygone MNP	*Cette « création » permet de visualiser les côtés du triangle, puis de le colorier ensuite*
Par la suite, on peut rajouter :	
long affichage de la longueur MN	*Cela permettra de vérifier si tous les triangles équilatéraux inscrits dans le carré ont la même taille*
Pour compléter la recherche, on sera amené à construire :	
N' point libre sur la droite (DC)	
P' image de N' par la rotation de centre M et d'angle 60 (degrés)	
T2 polygone MN'P'	*Le triangle MN'P' est équilatéral et a deux sommets sur des côtés du carré ABCD*

Figures de départ pour des recherches (figures 7 & 8) :



Pour résoudre le problème, on peut faire remarquer aux élèves qu'il suffit de se cantonner à un point M situé sur [EB] (où E est le milieu du côté [AB]).

Ce que peuvent alors faire les élèves :
Choisir un point M sur [EB]. Pour faciliter la recherche initiale, on peut demander aux élèves de choisir M assez près du milieu de [AB], comme sur la figure 8.
En déplaçant le point N sur le côté [BC], et même en dehors du carré, sur la droite (BC), on constate que l'on trouve bien une position de N telle que les sommets du triangle équilatéral MNP soient sur les côtés du carré ABCD.
Voici par exemple une figure finale :

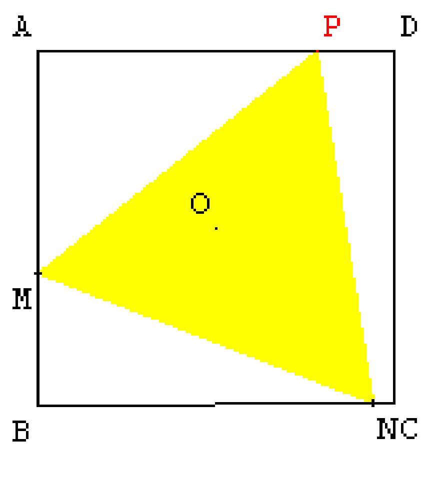


Figure 9

Cependant, si l'on choisit M plus proche de B (comme sur la figure 7), le point N (tel que P appartienne à (AD)) peut être, sur la droite (BC), mais en dehors du carré. Ce qui ne fournit pas une solution au problème posé !
Prenons M sur [EB], proche du point B. On est alors amenés à créer un point N' sur la droite (CD), puis à terminer le triangle équilatéral MN'P' par un point P'. En déplaçant N' sur la droite (CD), on trouve la position de N' qui donne une solution MN'P' au problème posé, à savoir un triangle équilatéral MN'P' inscrit dans le carré ABCD, comme par exemple sur la figure suivante :

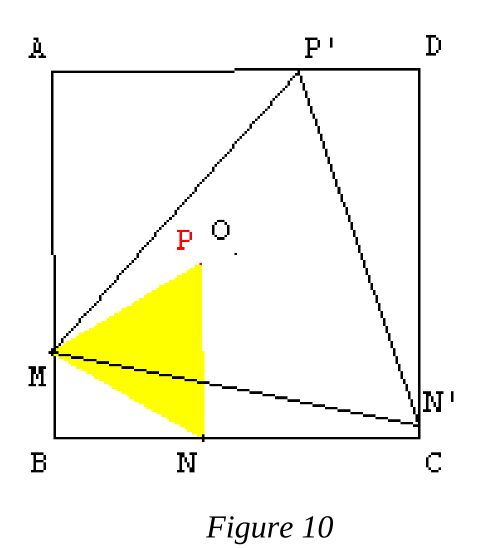


Figure 10

Compléments :
Appelons E le milieu de [AB], trouver une solution pour tous les points M du segment [EB] résoudra le problème pour tout point M sur les côtés du carré ABCD, les autres demi-côtés jouant des rôles similaires.
Plus M est proche du milieu E de [AB], plus on a de « chances » de trouver le triangle MNP avec N sur [BC], plus M est proche de B et plus on a de « chances » de trouver le point N sur [CD]. On

remarque que la position « critique » est telle que le triangle MNP aura son sommet N en C, ce qui revient au cas étudié lors de la première partie de l'exercice avec le texte de Marolois.

Prolongements possibles dans certaines classes comme en S par exemple :
Expérimentalement, avec le logiciel de géométrie, on a trouvé une solution pour chaque position de M sur [AB]. Mais rien n'a été justifié, et on n'a pas trouvé de construction des sommets P et N connaissant M sur le côté [AB].
On peut revenir à la figure sur GEOPLAN pour cette fois, par exemple, demander la « TRACE » du sommet P lorsque N se déplace sur le côté [BC]. On constate alors que tous les sommets P sont alignés ! Quelle est cette droite ? En fait, dans la figure 11, il s'agit de l'image de la droite (BC) par la rotation de centre M et d'angle 60°. Si N' est sur [CD], comme dans la figure 12, ce sera l'image par la rotation de centre M et d'angle 60°, de la droite (CD). Cette constatation peut mener à la construction du sommet P a priori, par intersection de cette droite avec le côté [AD], puis à celle de N, 3ème sommet du triangle équilatéral MNP, avec N antécédent de P par l'une ou l'autre des deux rotations citées plus haut. Il est alors aisé de démontrer que le triangle MNP, est une solution au problème posé, puisque, par construction, P est l'image de N par une rotation de centre M, d'angle 60°.

Exemples de figures :

1er cas : M est proche du milieu E de [AB], N est sur [BC]. La figure initiale pour la recherche est grisée, la figure solution est le triangle Mnp, la droite, image de (BC) par la rotation de centre M, d'angle 60° est représentée en pointillés, c'est aussi la trace laissée par le point P lorsqu'on déplace N sur (BC).

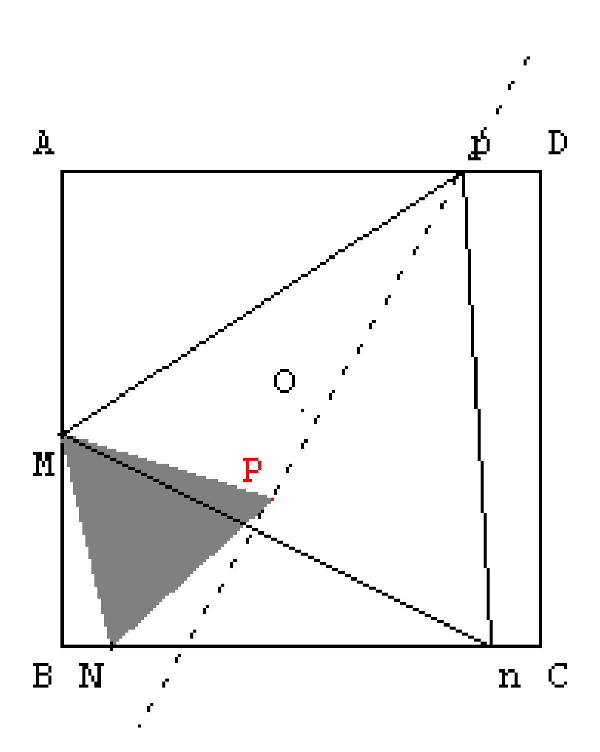


Figure 11

2ème cas : M est proche de B, N est sur [CD]. La position de p est obtenue, comme dans le cas 1, en déplaçant le point N le long du côté [CD]. Sur la figure ci-dessous, la figure initiale pour la recherche est grisée, la figure solution est le triangle Mnp, la droite, image de (CD) par la rotation de centre M, d'angle 60° est représentée en pointillés, c'est aussi la trace laissée par le point P lorsqu'on déplace N sur (CD).

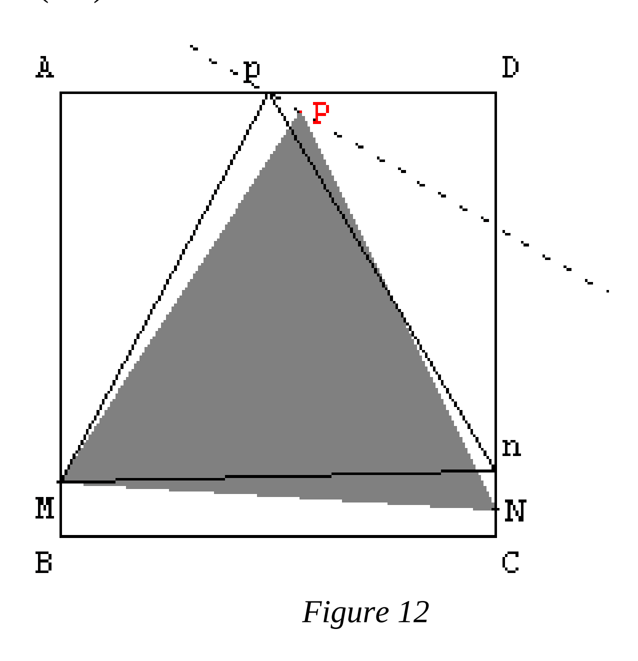


Figure 12

Il existe une infinité de triangles MNP équilatéraux inscrits dans le carré ABCD, ils ne sont pas tous isométriques. Peut-on déterminer la position de M qui donnera le triangle d'aire maximale ou le triangle d'aire minimale ? Ceci est une autre histoire !…

Autre exemple de figure obtenue avec le logiciel CABRI :
Cette figure a été conçue par Victor DIAFERIA, professeur au lycée du Castel, à Dijon, suite à la présentation de cette activité à l'IREM de Dijon en octobre 2006.

```
FIGURE CabriII vers. MS-Windows 1.0

Window center x: 0.370416666666667 y: 3.4925 Window size x:
26.6435416666667 y: 16.430625

1: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, I, nSt
Val: 0 0

2: Axes, 1, CN:1, VN:3
Gr, W, t, DS:1 1, GT:0, I, nSt
Const: 1, Val: 1 0, 0 1

3: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Val: -8.83708333333333 2.83104166666667

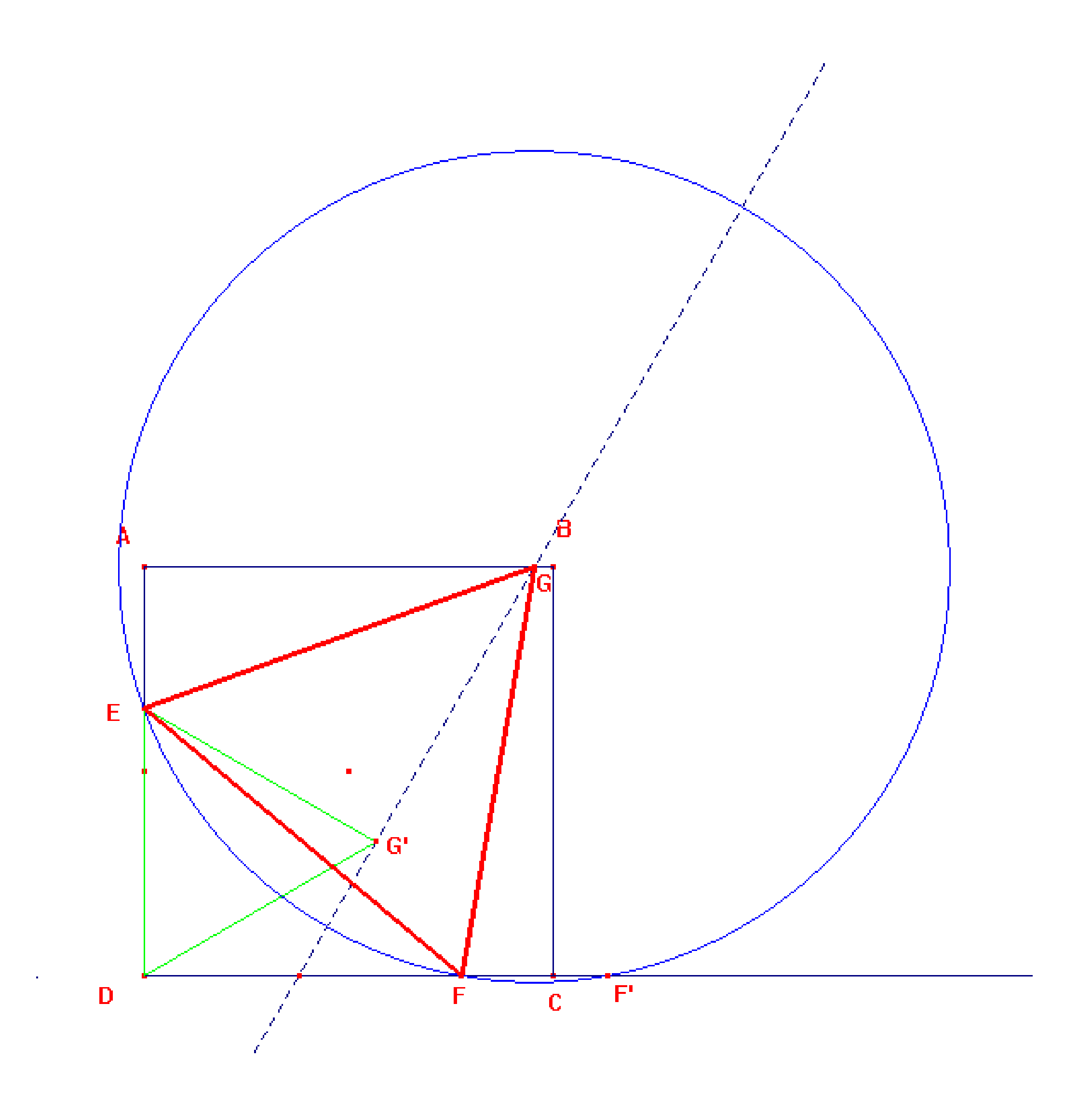
"C", NP: -217, 21, NS: 11, 18
4: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Val: -5.66164961930354 -0.343961888366359
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"D", NP: -481, 17, NS: 12, 18
5: PReg, 262145, CN:2, VN:6
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 3 4
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"A", NP: -470, -253, NS: 10, 18
6: PReg, 1, CN:1, VN:0
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 5
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"B", NP: -212, -257, NS: 12, 18
7: PReg, 2, CN:1, VN:0
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 5
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

8: PolReg, 0, CN:4, VN:0
V, W, t, DS:1 1, GT:0, V, nSt
Const: 4 5 6 7
```

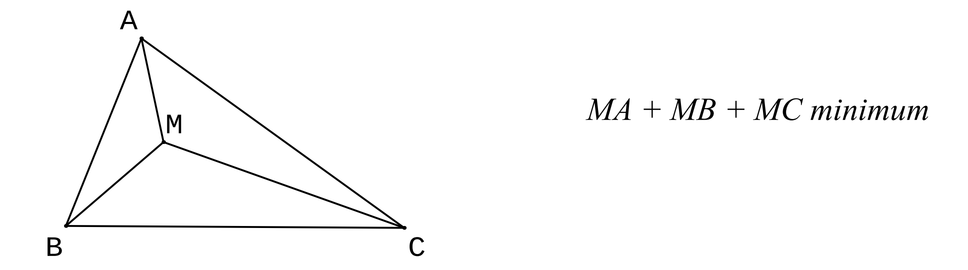

A
B
G
E
G'
D
F
C
F'

Le point de Fermat – Torricelli

Philippe REGNARD, Lycée Jules Renard, Nevers

Le traité de Pierre de Fermat *Methodus de Maxima et Minima* qui nous est parvenu par l'intermédiaire de Mersenne, et des copies d'Argobast, se termine par l'énoncé du problème suivant :

Etant donnés trois points, trouver un quatrième, tel que si l'on mène des droites aux points donnés, la somme de ces trois droites soit minimum.



Pour Fermat, nul doute que la méthode des maxima et des minima exposée dans ces quelques feuilles soit capable de résoudre une telle question.

Informé par un courrier de Mersenne le problème fut d'abord traité et résolu par Evangelista Torricelli. On trouve en particulier la solution dans des lettres du savant italien à Vincenzio Renieri qui datent de la fin de l'année 1646. Cavalieri puis Viviani traitèrent le sujet vers la même époque.

Vous trouverez en annexe 2 une traduction du latin d'extraits de deux des lettres de Torricelli telles qu'on peut les trouver dans les *Opere* de Torricelli édités en 1912 et disponibles sur internet dans *The Archimedes Project.* Le texte est tapé sans les figures que j'ai reconstituées à la suite de la traduction.

Alors que je lui demandais des renseignements sur ce problème au début des années 90, Pierre Collaudin m'avait donné quelques pages qu'il avait utilisées pour des stages de formation permanente. Vous pouvez les lire en annexe 2. Elles se terminent par une activité en classe de terminale C où il introduit un point et une courbe dite de Samuel, prénom de son fils aîné.

Les logiciels de géométrie dynamiques sont particulièrement adaptés au problème du point de Fermat, puisqu'il faut conjecturer sa position avant d'envisager une démonstration. Dans une classe de seconde, nous avons travaillé, essentiellement en salle informatique, avec le logiciel Géoplan, afin :

- de proposer une conjecture caractérisant le point de Fermat
- de démontrer cette conjecture
- de construire le point de Fermat.

Ces activités ont d'une part permis aux élèves de se familiariser avec un logiciel de géométrie dynamique comme Géoplan, mais surtout de découvrir une géométrie simple, attrayante et originale.
Mais avant d'aborder ces solutions purement géométriques, il faut préciser que, dans son traité, Fermat n'envisageait pas ce type de problème sous cet angle. Le titre, *Methodus de Maxima et Minima*, nous fait d'ailleurs davantage pensé à un traité d'analyse.
Son premier exemple consiste à diviser un segment en deux de telle sorte que les deux segments obtenus soient les côtés d'un rectangle d'aire maximal.

A E C

En posant $AC = b$ et $AE = a$ on aura $EC = b - a$.
Il faut donc que $a(b-a) = ab - a^2$ soit maximal.
La méthode Fermat est la suivante. Lorsque le point E se déplace légèrement, a devient $a + e$ et $b - a$ devient quant à lui $b - a - e$.
Le produit est alors $(a+e)(b-a-e) = ab - a^2 + be - 2ae - e^2$.
Ce dernier est alors *adégalé* (adaequari) au précédent : $ab - a^2 \sim ab - a^2 + be - 2ae - e^2$
Il reste : $be \sim 2ae + e^2$
En divisant tout par e : $b \sim 2a + e$
Enfin, en supprimant le e : $b = 2a$.
B est bien au milieu de [AC].
Fermat ne justifie pas plus sa méthode mais conclut qu'il est impossible d'en trouver une plus générale.

Dans son *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes*, Paris, Firmin-Didot, (1860) Jean-Marie Duhamel tente d'expliquer la démarche de Fermat :
Lorsque la géométrie de Descartes parut, Fermat, étonné ce n'y pas voir spécialement traitées les questions de maximum et de minimum, fit connaître à cet effet une règle qu'il ne démontra pas, et sur laquelle il fondait d'autres règles pour la détermination des tangentes et des centres de gravité.
Elle peut être énoncée de la manière suivante, en employant, pour plus de clarté, le langage et les notations actuellement en usage :
Soit désignée par F(x) l'expression algébrique d'une quantité variable, dépendante d'une quantité indéterminée x et de quantités constantes données. Pour trouver les valeurs particulières de x qui donnent à F(x) des valeurs maxima et minima, il faut changer x en x + e et égaler les deux valeurs de l'expression désignée par F, qui correspondent à ces deux valeurs de l'indéterminée arbitraire, c'est-à-dire poser l'équation

$$(1) \qquad F(x) = F(x+e)$$

En retranchant les parties communes aux deux membres, il ne restera que des termes affectés de la première puissance ou de puissances supérieures de e ; on divisera par la puissance de e qui sera commune à tous les termes, et l'on obtiendra ainsi des termes débarrassés de la quantité e, qui pourra rester encore dans certains autres à diverses puissances. On supprimera ensuite tous ces derniers, et on ne conservera dans l'équation que les termes qui ne renferment plus e. Les valeurs de x tirées de cette équation seront celles qui correspondront tant aux valeurs maxima qu'aux valeurs minima de F(x) ; mais la règle ne donne aucun moyen de les distinguer les unes des autres…
Fermat n'ayant pas donné la démonstration de sa règle, diverses conjectures ont été faites sur le principe qui lui servait de base. Essayons de fixer l'opinion sur ce point.
Une remarque importante à faire d'abord, c'est qu'il déclare expressément que les deux membres de l'équation (1) ne sont réellement pas égaux. Il les considère, dit-il, «.tanquam essent aequalia, licet

revera aequalia non sint, et hujusmodi comparationem vocavi adœqualitatem » (comme si ils étaient égaux bien qu'ils ne le soient pas réellement et j'ai appelé une telle comparaison adégalité). Il est nécessaire encore de se rappeler un passage de la Nova Stereometria Doliorum de Kepler, imprimée en 1615, c'est-à-dire plus de vingt ans avant la publication de la méthode de Fermat. Ce passage se rapporte aux valeurs voisines, de part et d'autre d'une valeur maximum ; il est ainsi conçu :
« Circà maximum vero utrinque circumstantes decrementa habent initio insensilia. » (II pars, theorema V, corollarium II.) (Assurément, autour du maximum, ils ont, de part et d'autre, des décroissances insensibles au début)
Il me paraît évident, par ce rapprochement, que Fermat est parti de cette idée de Kepler, admise comme générale sans démonstration, que si, pour une certaine valeur x, F(x) est maximum, et que l'on considère des valeurs très voisines x ± e, le décroissement correspondant de F(x) sera incomparablement plus petit que l'accroissement ± e de x ; en d'autres termes, que la différence entre F(x) et F(x ± e) est infiniment petite par rapport à e, qui est supposé lui-même infiniment petit. Mais comme cependant elle n'est pas nulle, il prévient expressément qu'il entend que l'équation
(2) $F(x+e)-F(x)$ *ou* $F(x+e)=F(x)$ *n'est pas rigoureusement exacte.*

Cette relative stabilité autour d'un extremum constatée par Kepler et Fermat est l'une des premières constatations qu'ont fait les élèves en cherchant, à l'aide de Géoplan, la position précise du point de Fermat d'un triangle.
Dans la suite de son traité, Fermat utilise sa méthode pour résoudre, entre autre, divers problèmes de tangentes à la parabole, à l'ellipse ou à la cycloïde ainsi que de centre de gravité, de partages de segments plus sophistiqués que dans son premier exemple. Comme il a été dit plus haut, ce n'est qu'à la fin qu'il propose de trouver le point d'un triangle tel que la somme des distances aux trois sommets soit minimum.
Si le corps du traité est l'un des textes à l'origine du calcul infinitésimal, la question finale a souvent été exploitée et généralisée au 19ème siècle par Steiner. Son problème consiste à minimiser la liaison entre divers points du plan soit directement, soit en utilisant des points supplémentaires, dits points de Steiner. Par exemple, avec trois points, le point de Steiner est le point de Fermat Torricelli. Avec quatre points, on peut envisager une liaison comme dans la première figure, mais aussi une autre comme dans la seconde en s'autorisant deux points de Steiner.



Voilà à présent les différentes étapes du travail des élèves de seconde.

Première étape

Dans le logiciel Géoplan

Créer – point – points libres dans le plan A, *B*, *C* et *M*.
Créer – ligne polygone – polygone défini par ses sommets : *ABC* – nom : *t.*
Créer - segments – segments définis par 2 points : *MA MB MC.*
Créer – numérique – calcul géométrique – longueur d'un segment : *AB* nom *a*. Idem pour *MB* et *MC*.
Créer – numérique – calcul algébrique : a+ b + c – nom *d.*
Créer- affichage – variable numérique déjà définie : d – 6 décimales.

Piloter – piloter au clavier : sélectionner *M – OK.*
Piloter – modifier paramètre de pilotage au clavier : 0,001

La souris permet alors un déplacement rapide du point *M* tandis que les flèches du clavier affinent les déplacements de *M*.

On demande de ne pas modifier les emplacements initiaux de *A*, *B* et *C* mais éventuellement de faire un zoom avant ou arrière avec > et < lorsque les points sont trop rapprochés.

On demande de déplacer le point *M* de telle sorte que *d* soit minimum.

Sur les différents postes, il y a environ deux fois plus de triangles *ABC* ayant un angle obtus que de triangles acutangles. Et, dans la mise en commun des résultats, le point *M* s'est retrouvé la plupart du temps au sommet de l'angle obtus. Dans ces cas on a demandé d'afficher la mesure de cet angle obtus en degrés :

Créer – numérique – calcul géométrique – angle géométrique : en degré, nom : *an*

Créer – affichage – variable numérique déjà définie : an avec 6 décimales.

Parmi ces élèves, certains diminuent progressivement l'angle obtus et, à chaque étape, vérifie la position du point *M*, afin de savoir à partir de quelle valeur il quitte le sommet, tandis que d'autres modifient leur triangle en le rendant acutangle et recommencent le travail.

Premier bilan

Il semble que lorsqu'un angle est supérieur ou égal à 120°, le point *M* est confondu avec le sommet de cet angle.

Pour les autres triangles, le point *M* est à l'intérieur du triangle. La plupart du temps c'est, pour eux, un centre connu : centre de gravité, orthocentre… Mais quelques-uns uns suggèrent l'égalité des angles de sommet M ce qu'ils vérifient ainsi que les autres en créant et en affichant deux de ces angles.

On remarque qu'un pas de pilotage très fin est nécessaire pour obtenir des angles égaux à 120° alors que le minimum de *d* est atteint, à 6 décimales près, dans tout un domaine du triangle.

Deuxième étape

En se plaçant dans un triangle dont les angles sont aigus, on veut démontrer que le point *M* qui minimise *MA* + *MB* + *MC* est le point tel que $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 120°$. Une construction sur Géoplan est proposée.

Comme dans la première étape, est demandée la création d'un triangle *ABC,* d'un point *M* et des segments [*MA*], [*MB*], [*MC*], l'affichage de *d* = *MA* + *MB* + *MC*, ainsi que celui de deux des angles issus de *M*.

On construit ensuite l'image *M'C'B* du triangle MAB par la rotation de centre *B* et d'angle 60° (voir figure 1) :

Créer – point – point image par – rotation (angle mesuré) :

La figure se termine par la création des segments [*M'B*], [*C'B*], [*C'M'*] et [*C'A*].

Comme dans la première étape, on modifie alors la position du point *M*, pilote au clavier ou non, de telle sorte que *d* soit minimum, c'est-à-dire lorsque les angles affichés sont de 120°. Cette position coïncide avec l'alignement des points *C*, *M*, *M*' et *C'*. Pourquoi ?

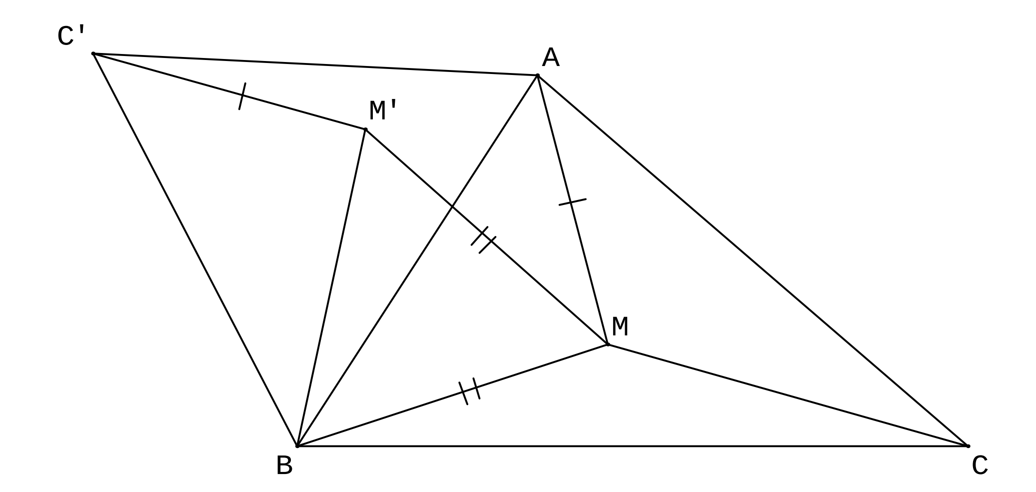
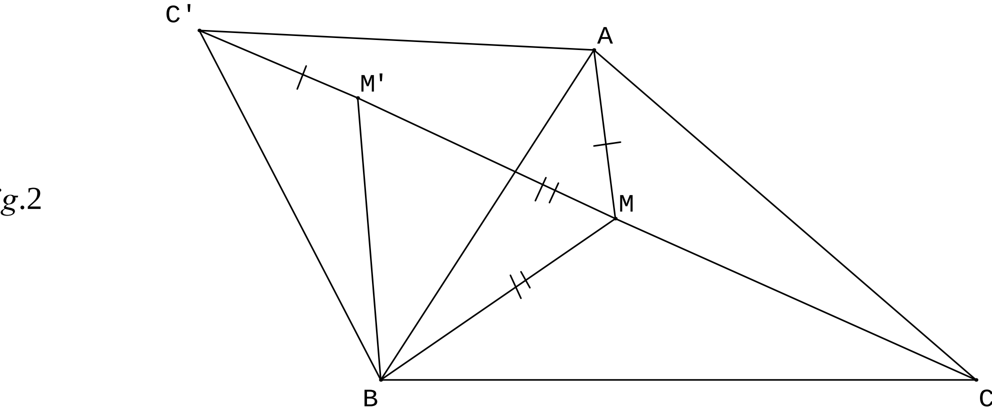


Fig.1

Troisième étape

1. Pourquoi les triangles BMA et BM'C' sont-ils isométriques ? En déduire que MA = M'C'.
2. Montrer que MB = M'M.

Fig.2



3. Que vaut également $MA + MB + MC$? Conclure.
Le point M ainsi défini satisfait-il à la conjecture de la deuxième étape ?
4. Lorsqu'il y a alignement des points C, M, M' et C' (figure 2), montrer que l'angle $\widehat{BMC}$ mesure bien 120°.
5. Montrer que les triangles BAC' et BMM' sont équilatéraux. Montrer alors que $\widehat{M'MA}$ mesure 60°. En déduire que $\widehat{AMB}$ mesure bien 120°.

Le point *M* solution du problème de Fermat est donc situé sur la droite (*CC*') joignant le sommet *C* au sommet *C*' du triangle équilatéral *ABC*' construit à l'extérieur de *ABC*. Mais comment le construire ?

Quatrième étape.

Sur une nouvelle figure, construire dans Géoplan (figure 3) les trois triangles équilatéraux *ABC'*, *ACB'* et *BCA'* extérieurs à *ABC.*

1. D'après l'étape précédente, sur quelles droites est situé le point de Fermat ?
2. En déduire que les trois droites (*CC'*), (*AA'*) et (*BB'*) sont concourantes et que les segments [*CC'*], [*AA'*] et [*BB'*] ont la même longueur.

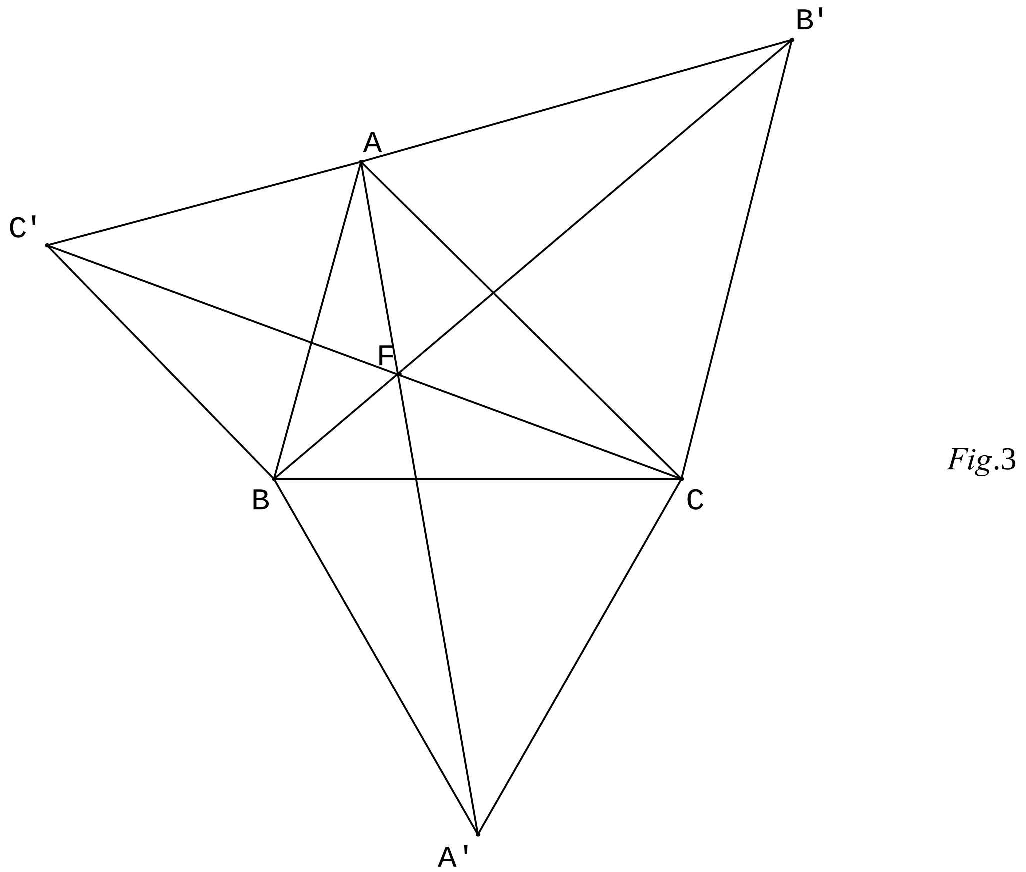


*Fig.*3

Cinquième étape. Devoir maison

Partie A. Théorème de Viviani (1622 – 1703).

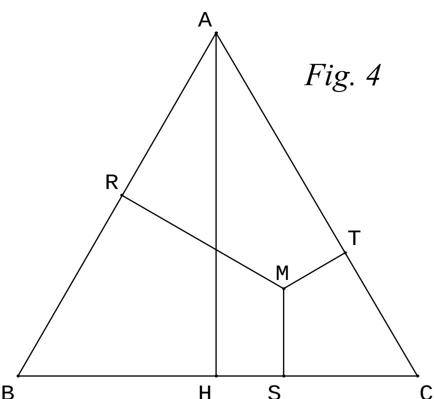


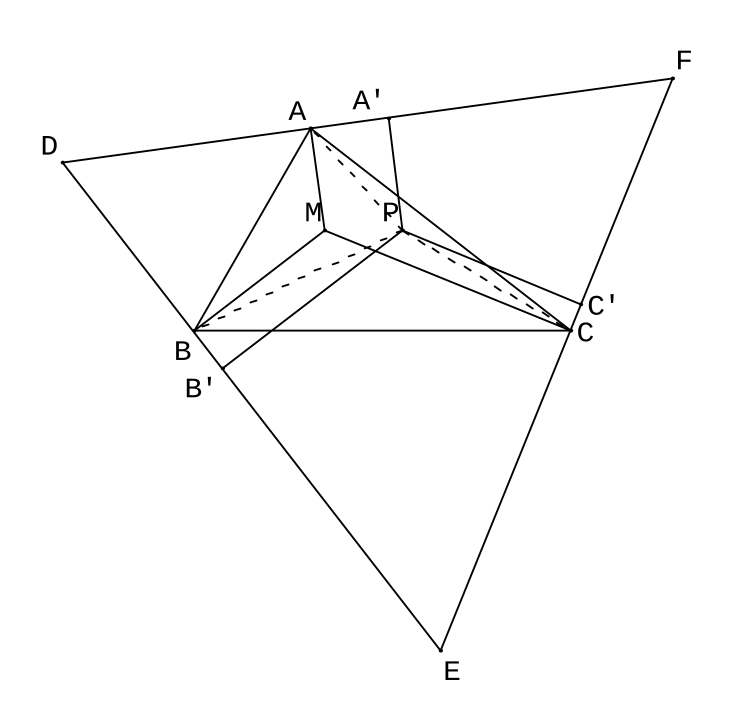
Fig. 4

Soient ABC un triangle équilatéral de côté *a* ; *H* est le pied de la hauteur issue de *A* et *M* un point à l'intérieur du triangle. On appelle *R*, *S* et *T* les projetés orthogonaux de *M* sur les trois côtés, respectivement [*AB*], [*BC*] et [*AC*].
1. Faire une figure en prenant *a* = 8 *cm*. (Voir figure 4)
2. Calculer, à l'aide de *a*, *AH*, *MR*, *MS* et *MT*, l'aire du triangle *ABC*, de deux façon différentes.
3. En déduire que *AH* = *PR* + *PS* + *PT*. (Théorème de Viviani).

Partie B. Le point de Fermat – Torricelli. (figure 5)
1. Soit *M* un point du plan ; construire un triangle *ABC* acutangle tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 120°$. Expliquer la méthode de construction. On appelle *M* le point de Fermat du triangle *ABC.*

On veut montrer que le point *M* ainsi construit est celui qui minimise la somme *MA* + *MB* +*MC*.
2. Construire les perpendiculaires à (*MA*), (*MB*) et (*MC*) passant par *A*, *B* et *C*. Ces trois droites se coupent pour former un plus grand triangle *DEF*.
3. Montrer que le triangle *DEF* est équilatéral.
4. Soient *P* un point à l'intérieur du triangle *DEF* ; *A*', *B*' et *C*' les projetés de *P* sur les côtés de *DEF*. Montrer que *PA' + PB' + PC' = MA + MB + MC.*
5. Montrer que *PA + PB + PC* ≥ *PA' + PB' + PC'*.
6. En déduire que pour tout point P à l'intérieur de *DEF, PA + PB + PC* ≥ *MA + MB + MC*. Conclure.

Fig 5



Annexe 1.

Extraits des lettres de Evangelista Torricelli à Vincenzo Renieri du 8 octobre et du 8 décembre 1646. (Traduction personnelle)

Etant donnés trois points A, B et C, on cherche à ce que, les trois ensemble soient le plus près possible d'un point D, à savoir AD, BD, CD ; je dis que les trois angles ADB, BDC, CDA doivent être égaux entre eux. Car s'il est possible que deux quelconques d'entre eux ne soient pas égaux, supposons ADB et BDC, faisons passer tout autour une ellipse par le point D où la tangente est EF (*figure 6*) ; les angles EDA et FDC seront égaux par la 48 du livre 3 des Coniques. Mais on a posé BDA, BDC inégaux, donc les restes BDE, BDF seront inégaux. C'est pourquoi, dans ces conditions, le cercle de centre B et de rayon BD coupera et la droite DF et cette même ellipse. Parce que si le cercle ne coupe pas l'ellipse, alors il pourra dans l'arc de cercle DF, y avoir une droite s'appuyant sur le point D de telle sorte qu'elle tombe dans un lieu qui est entre la section conique et sa tangente ce qui ne peut pas se produire d'après la 36 du livre 1 des Coniques. Qu'on prenne un point I quelconque sur l'arc de l'ellipse intercepté par le cercle il y aura des droites AD et DC les deux ensemble égales aux droites AI et IC, les deux ensemble, d'après la 52 du troisième livre des Coniques ; mais BI est plus petit que BD donc les 3 ensemble IA, IB, IC seront plus petits que les 3 les plus petits DA, DB, DC ce qui ne peut pas être. Donc, quand les trois droites ensemble sont minima, les trois angles au point D d'où elles sont tirées, sont égaux entre eux.

L'arrangement du problème est évident (*figure 7*). Soient trois points A, B, C, on demande de trouver le point D duquel les trois angles ADB, BDC, CDA sont égaux entre eux. Je dis que les trois droites menées de D sont minima. En effet si elles ne sont pas minimum, que ce soit minimum en un autre point E ; et les trois angles en E sont égaux entre eux d'après la démonstration précédente. C'est un fait que AEB sera $\frac{1}{3}$ de quatre droits, de même AEC sera $\frac{1}{3}$ de quatre droits et par construction BDC sera aussi $\frac{1}{3}$ de quatre droits. Et pour ces raisons il y aura dans le quadrilatère BDCE plus de quatre angles droits, ce qui est absurde.

Trouver le point D est vraiment facile (*figure 8*) soit par la 33 du livre III d'Euclide soit de la façon suivante. Les trois points A, B, C étant donnés, menons sur AB, BC, des triangles équilatéraux, décrivons des cercles autour des triangles qui se coupent à l'intérieur du triangle ABC en D ; ce sera le point D cherché. En effet les deux angles BDC et BEC sont opposés dans le quadrilatère inscrit dans le cercle. Or l'angle en E est de 60° donc le reste BDC sera de 120° et ainsi pour les autres.

Reste la limite du problème qui n'a pas été donnée par son auteur. Ainsi le problème n'est pas résoluble toutes les fois que le point D des cercles ne tombe pas à l'intérieur de ABC ; ce qui arrive chaque fois que le triangle ABC aura un angle qui n'est pas inférieur à 120°, mais dans ce cas de figure le sommet de l'angle cité précédemment répond à la question, bien qu'improprement.

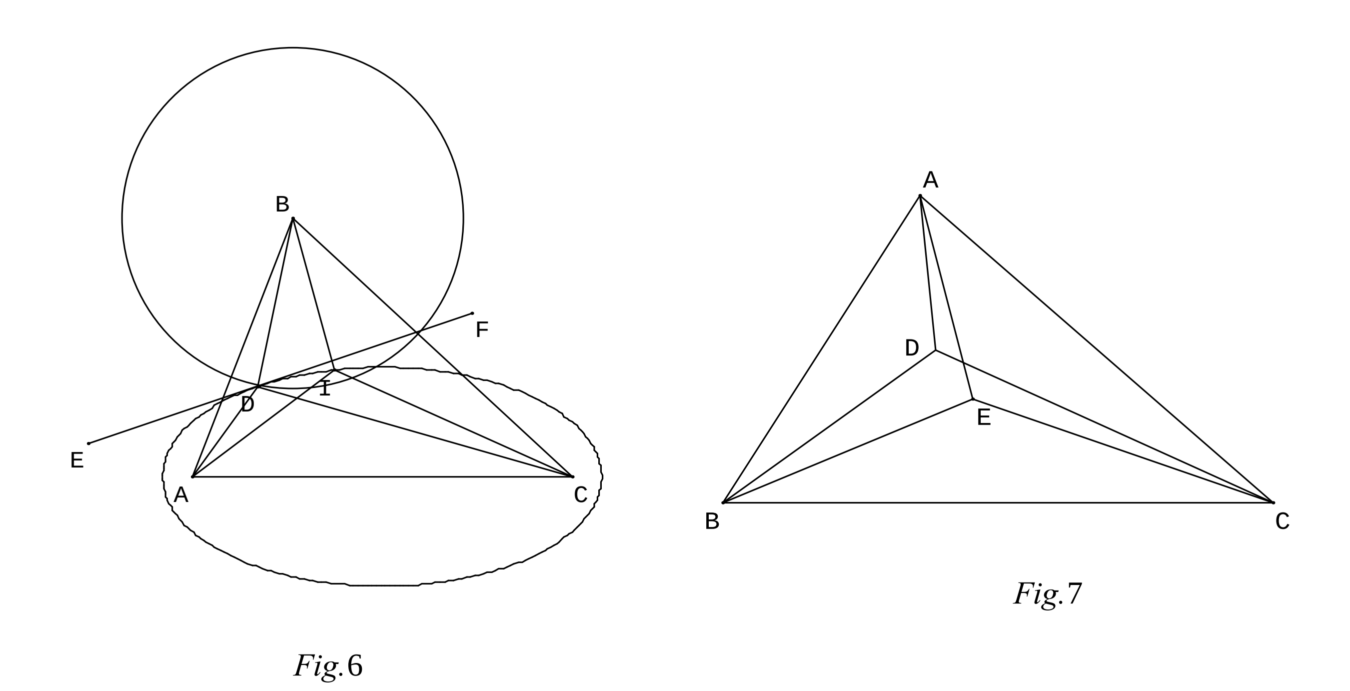


*Fig.*6

*Fig.*7

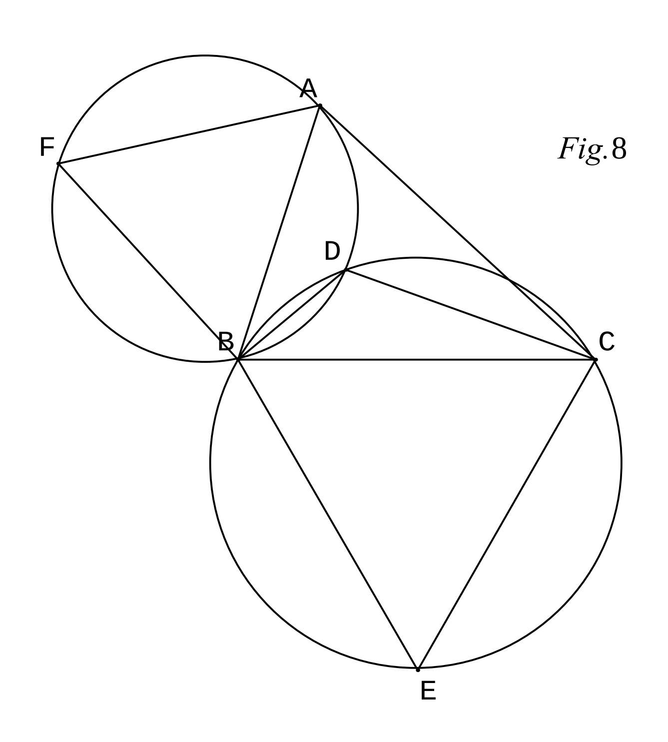


*Fig.*8

Annexe 2

PROBLEME DE FERMAT

Pierre COLLAUDIN, Paray le Monial

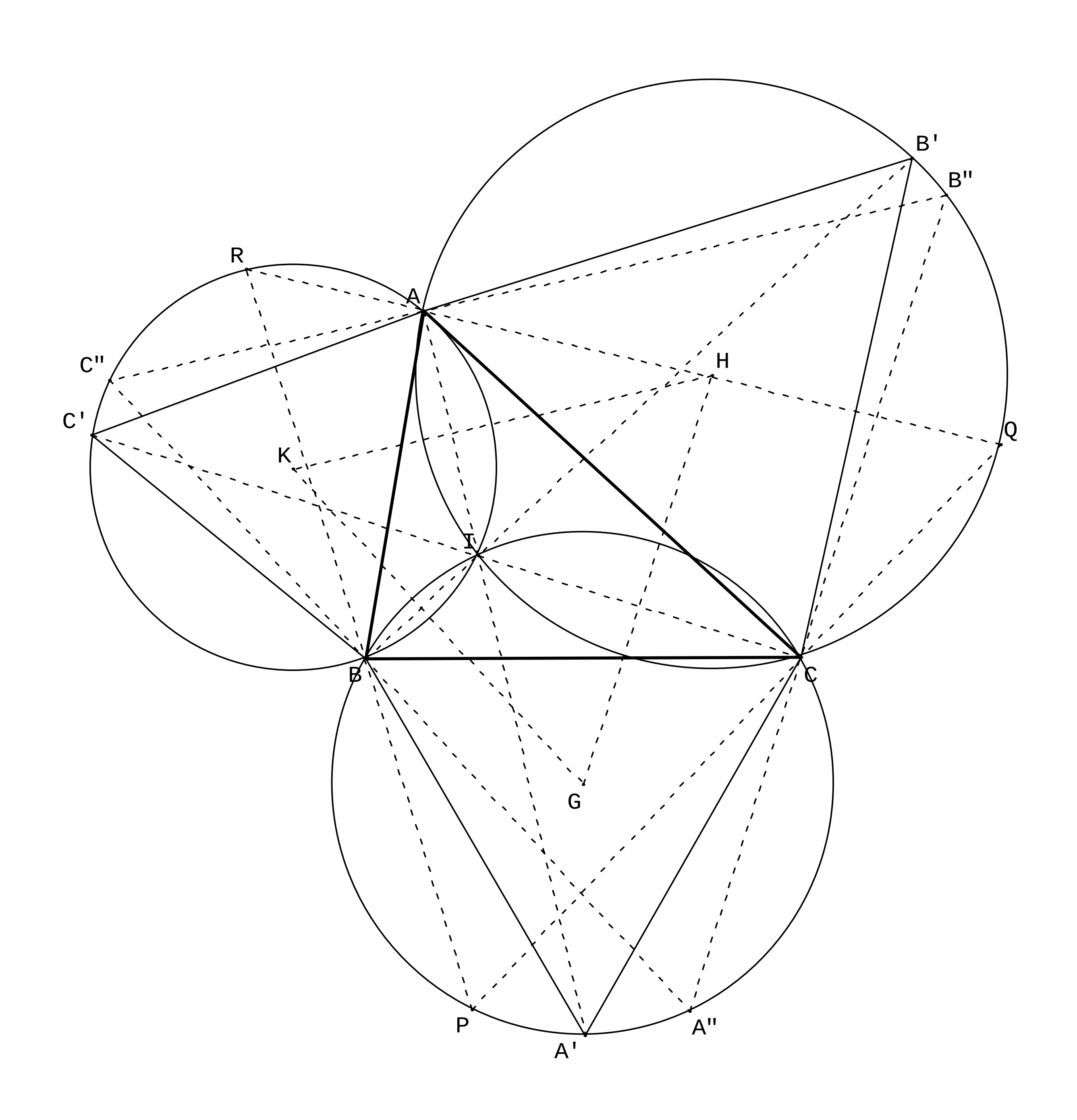
Fermat proposa à Torricelli le problème suivant :
Déterminer un point M dans un triangle ABC tel que la somme $MA + MB + MC$ *soit minimale.*
Ce problème a servi à construire les énoncés de plusieurs exercices d'application des isométries ou des propriétés des angles s'appuyant sur une configuration très riche.

0 - ETUDE DE LA CONFIGURATION

Soit *ABC* un triangle dont les angles ont une mesure ne dépassant pas en valeur absolue 120°.
Soient *A'*, *B'*, *C'* 3 points tels que les triangles *A'BC, AB'C* et *ABC'* soient équilatéraux et extérieurs à *ABC*. On désigne par *G, H, K* les centres de gravité respectifs de ces triangles.
Soient $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ les cercles circonscrits à ces 3 triangles sécants en un point I.
Soit *A"B"C"* le triangle obtenu en traçant les perpendiculaires à *IA, IB, IC* passant par *A, B* et *C*.
Soit *P* un point quelconque de $\mathscr{C}_A$ extérieur au triangle *ABC*.
Soient *Q* l'intersection de $\mathscr{C}_B$ et de (*PC*), autre que *C,* et *R* l'intersection de (*OA*) et de (*PB*).

Propriétés démontrables

- *AA'= BB' = CC'*
- $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ sont sécants en un point *I* appelé point de' Torricelli du triangle *ABC*.
- (*AA'*), (*BB'*) et (*CC'*) sont concourantes en *I* appelé aussi point de Fermat du triangle *ABC*.
- Les six angles en I déterminés par les trois droites concourantes ont la même mesure.
- *CHK* est un triangle équilatéral appelé triangle de Napo1éon.
- $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
- (*ABC*) et (*A'B'C'*) sont deux triangles ayant le même centre de gravité.
- *IA + IB + IC = AA' =BB' = CC'.*
- $cos\left(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{BB'}\right) = cos\left(\overrightarrow{BB'};\overrightarrow{CC'}\right) = cos\left(\overrightarrow{CC'};\overrightarrow{AA'}\right)$.
- $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'}\right)$.
- *R* est élément de $\mathscr{C}_C$.
- *POR* est équilatéral.
- *A"B"C"* est équilatéral.
- *IP + IQ + TR* est maximal pour *IP* maximal.
- *A", B"* et *C"* sont éléments respectifs de $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$.


B'
B''
R
A
C''
H
C'
Q
K
I
B
C
G
P
A'
A''

I - **METHODE** 1
Cette méthode utilise une extension du théorème de Ptolémée.

Préliminaire
Démontrer que pour tous nombres complexes *a, b, c* et *d* :
$\left|(a-c)(b-d)\right| \leq \left|(a-b)(c-d)\right| + \left|(a-d)(b-c)\right|$
Préciser les cas d'égalité.
En déduire le théorème de Ptolémée et sa réciproque :
Pour tout triangle ABC et pour tout point *D* du plan $AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC$.
L'égalité n'ayant lieu que si *D* appartient à l'arc $\overset{\frown}{CA}$ ne contenant pas *B* du cercle circonscrit au triangle *ABC.*

Résolution du problème.
Démontrer que pour tout point M du plan $MC + MB \leq MA'$.
En déduire que $AA \leq MA + MB + MC$ l'égalité n'ayant lieu que pour $M = I$.

II **METHODE 2**

Cette méthode qui semble la plus rapide aurait été proposée par J.E. Hofmann en 1929 et par Tibor Gallai : elle utilise principalement les propriétés des rotations et des angles.

Résolution du problème
On considère un triangle *ABC* d'angle ne dépassant pas en mesure 120° : on effectue une rotation *r* de centre *B* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ orienté dans le même sens que $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$.
Soit *M* un point quelconque intérieur au triangle *ABC* et *M*' son image par *r*.
Soit *A*' l'image de *A* par *r*.

1) Etablir que $MA + MB + MC = M'A' + M'M + MC$.
2) Etablir que *M*', *A*', *M* et *C* sont alignés si et seulement si *M* est élément de la droite (*A*'*C*) et élément du cercle circonscrit au triangle *ABA*'.
3) En déduire une solution du problème de Fermat.
4) Quelles sont les propriétés de la configuration initiale (§ 0) que l'on peut démontrer à l'aide des questions précédentes. ?

III **METHODE** 3

II semblerait que cette méthode ait été redécouverte par F. Riesz. Elle est basée sur le théorème de Viviani.

Préliminaire
Démontrer le théorème de Viviani (l622 - 1703) : la somme des distances *a*, *b, c* d'un point *M* intérieur à un triangle équilatéral aux côtés de ce triangle est égale à la hauteur *h* de ce triangle.

Résolution du problème
Soit *M* un point quelconque intérieur au triangle *ABC*.

1) Démontrer que $MA + MB + MC$ est supérieur ou égal à la somme des distances de *M* aux 3 côtés du triangle *A"B"C*" (§ 0)
2) En déduire que $MA + MB + MC = IA + IB + IC$.

IV - METHODE 4

Cette méthode proposée au X1X^{e} siècle par Steiner utilise des propriétés de l'ellipse.

Préliminaire
Soient une ellipse de foyers *B* et *C* et *T* la tangente à cette ellipse en un point *M* de $\mathcal{E}$.

1) Démontrer que *T* est la bissectrice extérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)$.
2) Soit 2*a* la distance entre les sommets du grand axe ; démontrer que pour tout point *M* de l'ellipse *MB* + *MC* = 2*a* et réciproquement.

Résolution du problème

- Soit *I* une solution du problème de Fermat.
- Soit $r = IA$.
- Soit $E_k = \{M \in P / MB + MC = k\}$. E_k est une ellipse de foyers *B* et *C*. *I* est élément du cercle Γ

de centre *A* et de rayon *r* :

1) Montrer que si *I* est solution du problème de Fermat alors *I* est élément de Γ et de l'ellipse de foyers *B* et *C* tangente à Γ en *I*.
2) A l'aide de la tangente commune à Γ et à cette ellipse, démontrer que $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)=\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}\right)(\pi)$.
3) Par une méthode analogue, démontrer que $\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)(\pi)$.
4) En déduire une résolution du problème de Fermat.

BIBLIOGRAPHIE (telle qu'elle a été citée par Pierre Collaudin en 1991)

Paragraphe 0 : Configuration

- Recueil des problèmes des bulletins de l'IREM de Besançon.
- Redécouvrons la géométrie - Coxeter (Dunod). p. 95.
- Mathématiques 1ère S et E géométrie - Collection Terracher (Hachette). p. 247.
- Mathématiques terminales C, E géométrie - Gauthier. Royer. Thiercé (Hachette). p. 196.
- Cours de mathématiques élémentaires - F.G.M. (Mame. 1905) Th. 162.
- Géométrie classe de mathématiques - Lebossé et Hemery (Nathan). p.206.
- Sujet du baccalauréat, série C. septembre 1985. Paris.

Paragraphe I : Méthode 1

- Préliminaire
  Redécouvrons la géométrie - Coxeter (Dunod). p. 48.
  Algèbre et géométrie, terminales C et E - Sauser (Ellipses), p. 36.
- Résolution
  Recueil des problèmes des bulletins de l'IREM de Besancon.

Paragraphe II : Méthode 2

- Algèbre et géométrie, terminales C et E - Sauser (Ellipses), p. 164.
- Joyaux Mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 37.
- Mathématiques seconde - Glaymann et Malaval (Cedic), p. 241.

Paragraphe III : Méthode 3

- Mathématiques l^{ère} S. E - IREM de Strasbourg (Istra), p. 273.
- Joyaux mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 33.
- 100 greats problems of elementary mathematics - Dorrie (dover), p. 361.

Paragraphe IV : Méthode 4

- Joyaux mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 39.
- Sujet du baccalauréat, série E. 1985. Dijon.

PROLONGEMENT.

En augmentant le nombre de points, on se ramène à la recherche du proximal de n points : (voir pour $n = 4$ le T.P. de terminale C et E de l'IREM de Strasbourg, intitulé *Les autoroutes de Monsieur Fermat*, et pour n points l'article d' E. Ehrhart dans un bulletin de l'APMEP).
Avec les élèves de terminale C, nous nous sommes posé quelques questions sur une autre extension. Ne sachant pas si le thème avait été étudié, par commodité et aussi par amusement, nous avons nommé certains éléments.
Etant donnés un triangle ABC et un réel α strictement positif. Soit φ_α l'application du plan dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\varphi_\alpha(M) = MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha$

Soient M_α les points tels que $\varphi_\alpha(M_\alpha) \leq \varphi_\alpha(M)$ pour tout point M du plan.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M_α quand α décrit $\mathbb{R}_+^*$.

M_α est appelé point de Samuel d'ordre α de *ABC*.
$\mathscr{C}$ est appelée courbe de Samuel du triangle ABC.

Nous avons tracé quelques courbes de Samuel de triangles distincts en procédant par encadrement de M_α pour différentes valeurs de α.
Nous avons observé les résultats suivants dans le cas de triangles non isocèles.

- Si le triangle n'a pas d'angle obtus :

alors $\lim\limits_{\alpha\to\infty} M_\alpha = M_\infty$ est le centre du cercle circonscrit Γ au triangle ABC et $\varphi_\alpha(M_\infty) = 3R^\alpha$ où R est le rayon de Γ.

- Si le triangle a un angle obtus :

alors $\lim\limits_{\alpha\to\infty} M_\alpha = M_\infty$ est le milieu du plus grand côté du triangle ABC.

- Si le triangle n'a pas d'angle de mesure supérieure à 120° :

alors M_1 est le point de Fermat du triangle ABC et il existe un réel $\lambda < 1$ tel que pour tout α de $]0;\lambda[$, M_α est confondu avec le sommet du triangle ABC dont l'angle est de plus grande mesure : la courbe de Samuel présente alors un point d' arrêt ou un point limite (nous n'avons pas pu le déterminer).

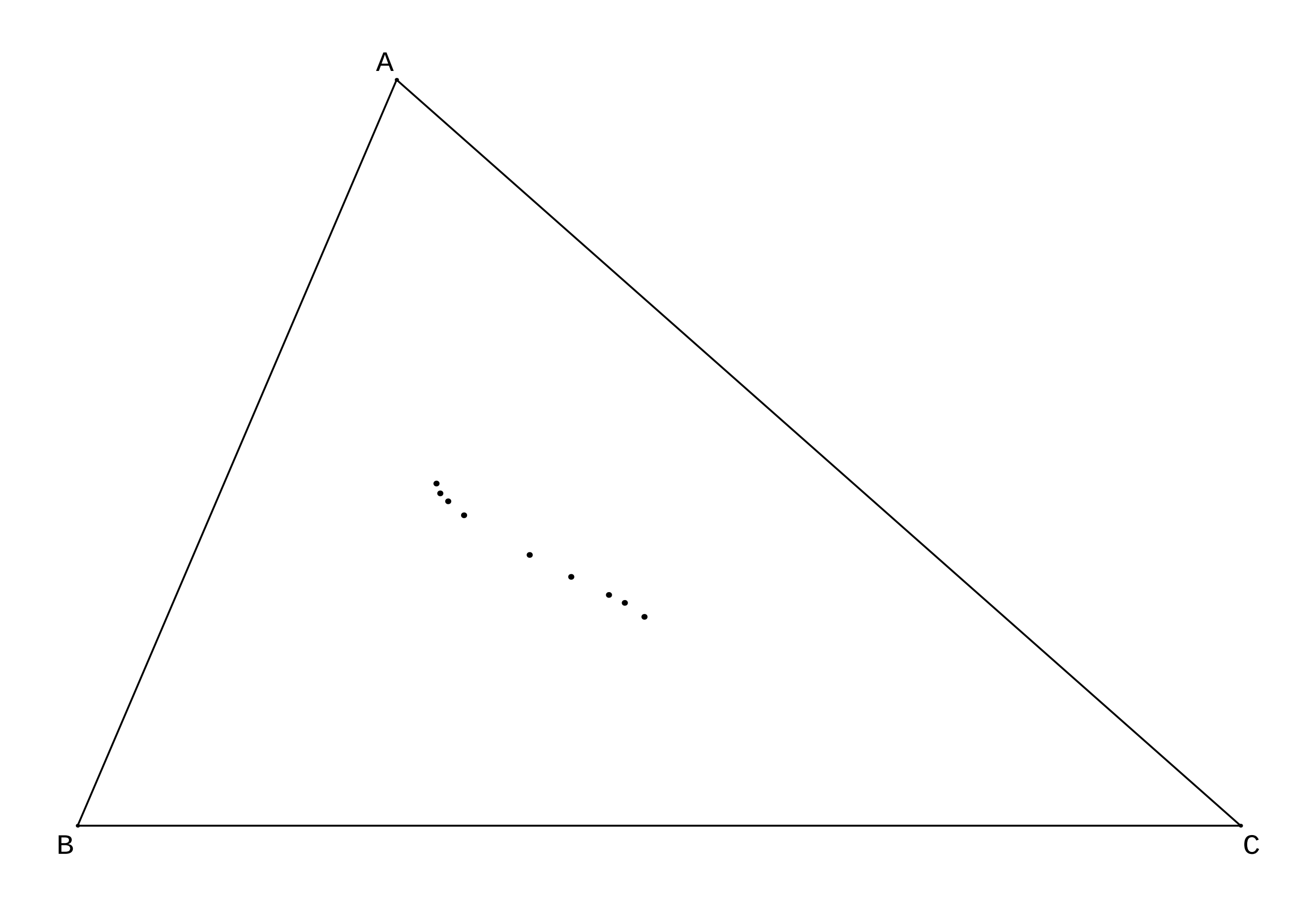
- Si le triangle a un angle de mesure supérieure à 120° :

alors la courbe de Samuel présente comme point d'arrêt le sommet A d'angle de plus grande mesure ; il existe également un réel. $\lambda \geq 1$ tel que pour tout a, si $\alpha < \lambda$ alors M_α est confondu avec A.

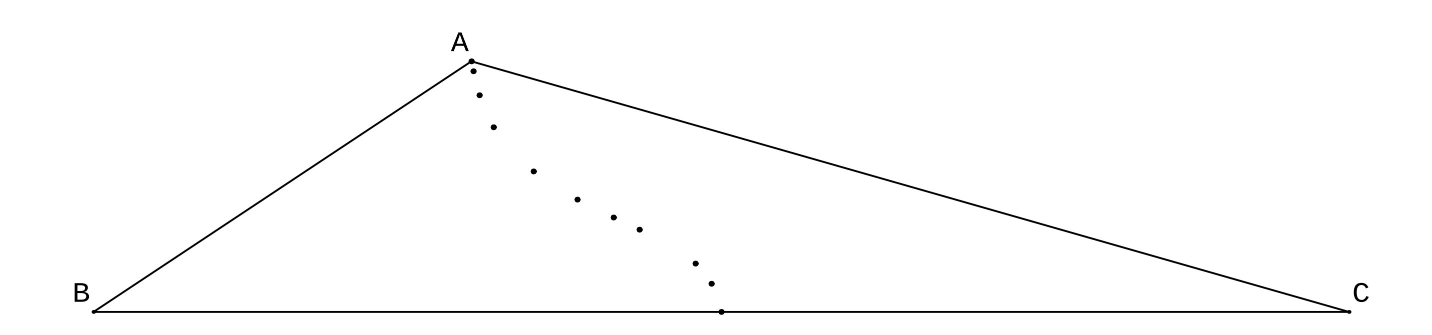
Toutes les courbes de Samuel passent par M_2 qui est le centre de gravité du triangle.

Question

Comment déterminer λ en fonction des mesures des angles du triangle sans utiliser une méthode dichotomique ?



Triangle acutangle.
Points de la courbe de Samuel pour les valeurs de α suivantes (en *allant* vers A) : 20 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,9 ; 0,85 ; 0, 81. $\lambda \approx 0{,}8$



Triangle ayant un angle supérieur à 120°.
Points de la courbe de Samuel pour les valeurs de α suivantes (en *allant* vers A) : 10 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,8 ; 1,6 ; 1,4 ; 1,2 ; 1,1 ; 1,05. $\lambda \approx 1{,}012$

Juan de Ortega : de l'obscurité à la lumière
Trois études de textes en classe de seconde.

Frédéric METIN, Lycée « Le Castel », Dijon.

Lors du colloque premier cycle « Convergences » qui s'était tenu à l'IREM de Lyon en 2002, Pierre Collaudin avait présenté une étude sur les méthodes d'alliages et de mélanges utilisées dans de vieux livres d'arithmétique (d'après un texte manuscrit communiqué par Henry Plane). Patrick Guyot et moi avions proposé une présentation de problèmes anciens également issus d'ouvrages d'arithmétique commerciale. Notre domaine principal de recherche, jusque là centré sur la géométrie pratique et les fortifications, prenait alors une nouvelle dimension et s'étendait désormais aux mathématiques pratiques en général.

Avec le recul, je réalise que notre groupe de travail a souvent fonctionné sur ce principe de contagion positive, par lequel un intérêt personnel pour un certain domaine se transmet aux autres membres sans phagocytage pour autant ; Pierre, qui était curieux de tout et avait travaillé de nombreux sujets, a ainsi dessiné pas mal de pistes de recherche, dont l'arithmétique pratique, qui n'ont pas forcément toujours abouti à des travaux communs, mais au moins à des recherches parallèles donnant lieu à de nombreux échanges et enrichissements mutuels. En ce qui me concerne, l'envie d'étendre mon travail de recherche (en DEA de Philosophie en 2003, puis en thèse depuis) à la totalité des mathématiques pratiques de la Renaissance est due en partie à cet environnement positif et au désir de prolonger l'étude des thèmes dont Pierre avait contribué à nous faire saisir la finesse.

C'est donc à l'occasion de recherches bibliographiques sur les mathématiques pratiques que j'ai découvert le texte de Juan de Ortega, d'abord par des citations dans d'autres livres, puis dans l'ouvrage lui-même, dont j'ai pu consulter un exemplaire à la médiathèque d'Orléans[1], puis à celle de Montpellier[2] où le microfilmage a même été possible. J'avais d'abord étudié le livre pour ce qu'il révèle de l'aspect moral des pratiques commerciales, (les valeurs maximales de taux d'intérêt, le pourcentage de bénéfices admissible, etc.), mais j'ai découvert ensuite des contenus mathématiques aussi intéressants, lors de l'exploitation de certaines parties du texte en classe à l'occasion du travail sur la présente brochure. Je remercie d'ailleurs Roselyne Cases (de l'IREM de Toulouse) qui a donné un intérêt supplémentaire à ce travail en me signalant qu'un exemplaire de la version espagnole de l'ouvrage existe à Barcelone (car j'avais oublié de m'intéresser à la version espagnole…). Or, la bibliothèque universitaire de Valence[3] met à disposition en ligne le texte espagnol de l'édition faite en 1563 par Juan Perez de Moya, autre arithméticien catalan[4], et l'étude

---

[1] *Oeuvre tressubtille & profitable de lartz science de aristmeticque [arithmétique] & geometrie translaté nouvellement despaignol en francoys…*, Lyon, Estienne Balland, 1515. Cote : Rés. C2498.

[2] *Oeuure tressubtille et profitable de lart et science de aristmeticque : et geometrie translate nouuellement despaignol [de Jehan de lortie] en francoys [par Glaude Platin]* … Lyon, E. Balland pour Symon Vincent, 1515.
Cote : 77004 RES, Fonds ancien.

[3] http://biblioteca.uv.es/

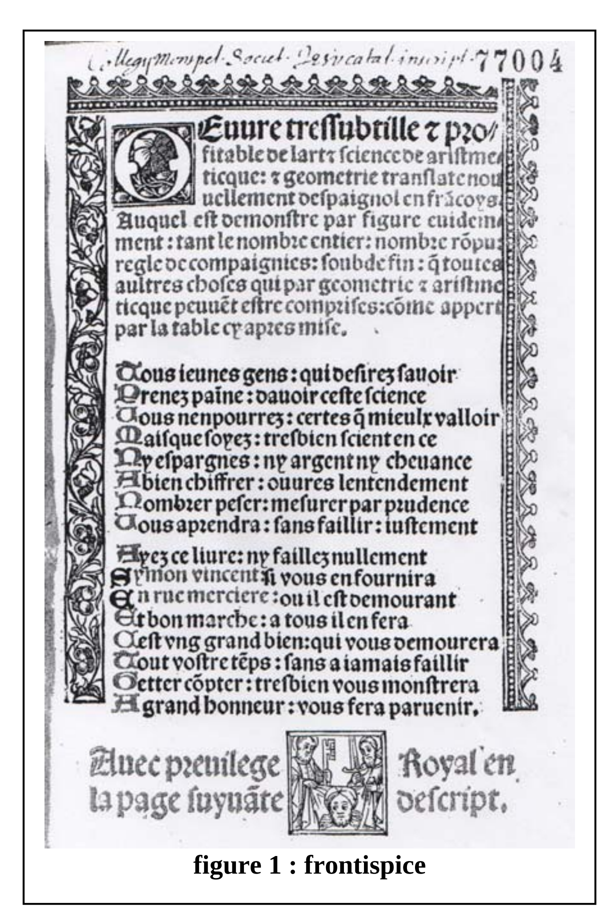
[4] La page de titre est manuscrite et fait référence à un autre livre : *Tratado de arithmetica, compuesto por el Bachiller Ioan Perez de Moya, impresso en Granados, año 1563, en 8. dias de Abril.*, mais le travail de Perez de Moya ne

comparée des deux textes permettra sans doute de comprendre une partie des obscurités de la version française ! Voyez plus bas l’explication du problème de la lance par exemple.

1. *Première activité : présentation du texte et calculs élémentaires.*

La richesse et l’étrangeté du livre de Juan de Ortega m’ont amené à en proposer des extraits en classe de seconde, en début d’année, face à des élèves frais et dispos et encore assez enthousiastes (classe de Seconde option Cinéma/Audiovisuel du lycée « Le Castel »), même si le choc initial a été fort (vous pensez bien : commencer par la lecture d’un texte espagnol du 16e siècle, c’est bizarre.)

a) <u>Le texte et son auteur</u>



77004

Oeuvre treſſubtille z profitable de lart z ſcience de ariſtmeticque : z geometrie tranſlate nouuellement deſpaignol en frãcoys. Auquel eſt demonſtre par figure euidemment : tant le nombre entier : nombre rõpu : regle de compaignies : ſoubdefin : q̃ toutes aultres choſes qui par geometrie z ariſtmeticque peuuẽt eſtre compriſes : cõme appert par la table cy apres miſe.

Vous ieunes gens : qui deſirez ſauoir
Prenez paine : dauoir ceſte ſcience
Vous nenpourrez : certes q̃ mieulx valloir
Maiſque ſoyez : treſbien ſcient en ce
Ny eſpargnes : ny argent ny cheuance
A bien chiffrer : ouures lentendement
Nombrer peſer : meſurer par prudence
Vous aprendra : ſans faillir : iuſtement

Ayez ce liure : ny faillez nullement
Symon vincent ſi vous en fournira
En rue merciere : ou il eſt demourant
Et bon marche : a tous il en fera
Ceſt vng grand bien : qui vous demourera
Tout voſtre tẽps : ſans a iamais faillir
Getter cõpter : treſbien vous monſtrera
A grand bonneur : vous fera paruenir.

Auec preuilege Royal en la page ſuyuãte deſcript.

figure 1 : frontispice

La page de titre de l’ouvrage est présentée sans préparation lors d’une des premières séances de module (figure 1 ci-contre) ; nous nous servons de la version microfilmée à Montpellier (c’est plus amusant lorsque les élèves découvrent la typographie originale). La première difficulté est bien entendu de parvenir à lire les lettres et à reconstituer les mots ; c’est un grand classique : les *s* sont écrits comme des *f*, les *v* et les *u* ont la même signification, ce qui perturbe énormément les élèves au début de la lecture. En outre le texte comporte de nombreuses abréviations typographiques Après plusieurs tentatives, les élèves arrivent à lire à haute voix, en donnant presque du premier coup le bon sens aux mots.

Cependant, il reste le problème des mots inconnus (qu’est-ce que peuvent être les *rõpus* ou la règle *de compaignies* ? Que signifie *getter*, *cõpter* ? Et le verbe *apparoir* ?[5]), et croyez-moi, les jeunes d’aujourd’hui préfèrent les activités bien balisées et ritualisées aux plongées dans l’étrangeté[6]. La difficulté première est donc liée à la désagréable impression d’être mené loin des chemins habituels…

Les questionnements sur l’expression amènent directement à une interrogation sur l’époque de rédaction du texte et sur son auteur, et bien que j’aie peu de renseignements à fournir à ce sujet, la lecture du privilège royal et de la préface sont très utiles : le privilège est accordé au nom de *Francoys par la grace de dieu Roy de france*, à Symon Vincent, *libraire demourant a lyon*, et daté du *onzieme jour de Janvier l’an de Grace Mil cinq cens & quatorze, et de notre regne le premier*. Cette datation doit être relativisée, puisque qu’il s’agit en fait de janvier 1515 (nouveau calendrier imposé en France en 1564 par Charles IX), ce qui permet aux élèves de situer ce Françoys comme le numéro 1 (celui qu’ils associent à Léonard de Vinci), grâce à la formule magique faisant référence à la bataille de Marignan.

---

concerne qu’un supplément d’une trentaine de pages sur la conversion des monnaies : c’est à voir.

5 Respectivement : *rompus* [fractions], *compagnies*, *lancer des jetons*, *compter* et ce verbe qui n’existe plus…

6 Chose entendue en seconde : « Moi, j’aime beaucoup les maths, mais par contre je déteste la géométrie » : les *maths*, ce sont les résolutions (mécaniques) d’équation.

Après lecture du *prologue du translateur*, Claude Platin, et de celui de l'auteur, nommé par Platin *frère Jehan de lortie de l'ordre de sainct dominicque, acteur de ce livre*, nous étudions le premier chapitre, consacré aux règles de numération (écriture des nombres entiers dans le système positionnel) puis aux quatre opérations élémentaires. Le paragraphe final[7] de ce chapitre fait référence à certaines méthodes alternatives de multiplication, que l'auteur se contente d'illustrer sans texte. Parmi les trois illustrations données, la première montre la multiplication de 43060 par 4085 *par jalousie* (cf. figure 2 ci-dessous). Le grand avantage de cette technique est qu'elle évite les retenues en cours de calcul[8] puisque chaque cellule est divisée en deux parties correspondant à deux ordres de grandeur (ou puissances de dix) successifs et que la disposition diagonale permet de ne pas se poser de question sur l'appariement des nombres. Des retenues sont quand même nécessaires pour les sommes diagonales finales, mais ce qui perturbe le plus les élèves est la disposition des chiffres du résultat, probablement due davantage à la fantaisie du graveur qu'à des considérations scientifiques. Je propose un diaporama reprenant et détaillant les étapes de cet exemple, ainsi que le suivant (figure 3) qui montre une multiplication ordinaire, pas si ordinaire que ça !

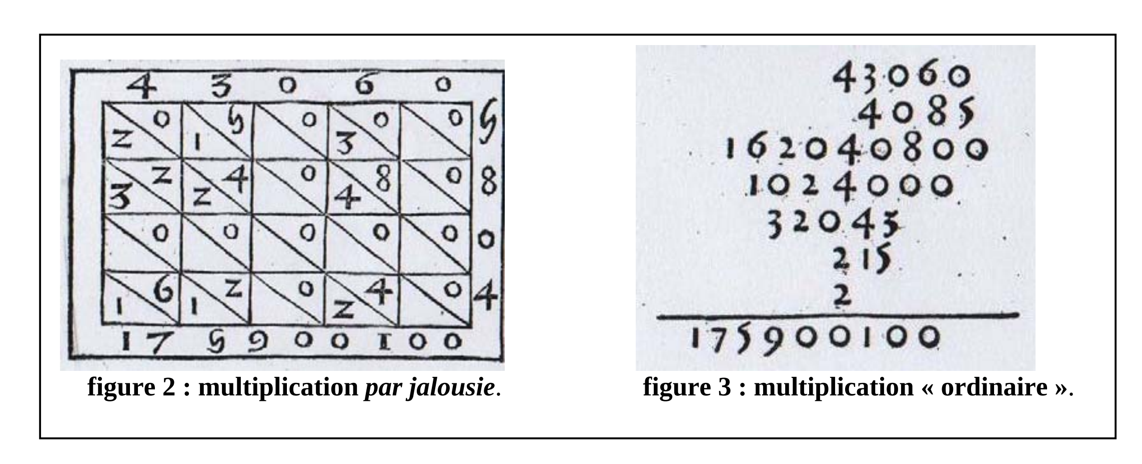


figure 2 : multiplication *par jalousie*. **figure 3 : multiplication « ordinaire ».**

La difficulté de compréhension réside ici dans le sens des multiplications partielles, effectuées de gauche à droite, et non le contraire, associé à une technique de décalage vertical des ordres de grandeur permettant de sommer finalement en colonnes, sans avoir à poser de retenue au cours des opérations partielles : ainsi, les chiffres sont placés dans la colonne appropriée mais pas nécessairement sur une même ligne, sans doute pour combler les vides au fur et à mesure.

Par exemple, on peut lire dans les deux premières lignes des calculs intermédiaires (*cf.* figure 4 ci-contre, les retenues ayant été ajoutées) les résultats des produits de 4 (premier chiffre de 4085) par 4, 3, 0, 6 et 0 successivement, c'est-à-dire : 16 (chiffres juxtaposés), 12 (chiffre des dizaines situé sur la seconde ligne en dessous du chiffre 6 des unités du premier résultat), 00 (dans mon explication de la figure 4, complète, mais pas dans la gravure originale de la figure 3), 24 (avec le même décalage) et 00. La suite correspond au produit de 0 par les cinq chiffres successifs du multiplicande, puis de 8, puis de 5, la règle étant de remplir au fur et à mesure les colonnes en se décalant à chaque fois d'une position, ce qui n'est pas sans rappeler notre propre technique.

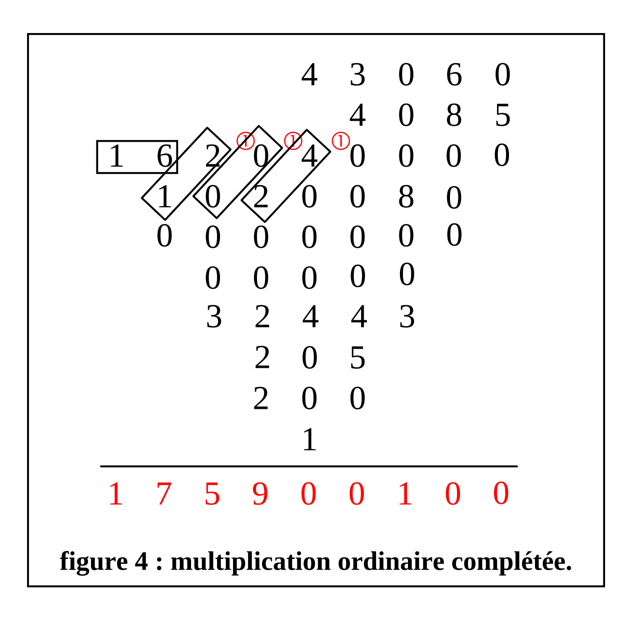


figure 4 : multiplication ordinaire complétée.

[7] Au *folio* XV, verso.

[8] […] *et aussi te fault noter que que par les deulx premieres exemples mis cy apres ne fault riens retenir mais poser tout au long* […]

Dès qu’ils ont compris la méthode, les élèves la trouvent « géniale » et s’appliquent à expliquer les chiffres donnés dans les lignes suivantes. Cependant, mon tableau ne correspond pas à la gravure originale du texte d’Ortega et il reste à comprendre la disparition des 0 superflus. Eh bien c’est tout simplement qu’ils sont superflus ! D’abord ceux qui naissent du produit par 0 : quand vous les faites disparaître et que vous « remontez » les chiffres dans leurs colonnes respectives afin de ne pas laisser de place vide, vous reconstituez la première ligne intermédiaire du texte original ; puis vous supprimez le premier des deux 00 obtenus lorsqu’on multiplie l’un des chiffres significatifs du multiplicateur par le dernier 0 du multiplicande (ce qui est à effectuer trois fois), et la remontée comble-vide redonne la seconde ligne intermédiaire, et ainsi de suite. Il reste deux petits bémols :

1°) La gravure originale (figure 3) a été faite apparemment sans souci de l’alignement et un décalage horizontal rend les correspondances difficiles,

2°) Le texte espagnol, tel qu’on peut le consulter en ligne[9] n’offre pas exactement la même illustration et la comparaison réserve quelques surprises : à vous de les découvrir ! (*cf*. figure 5.)

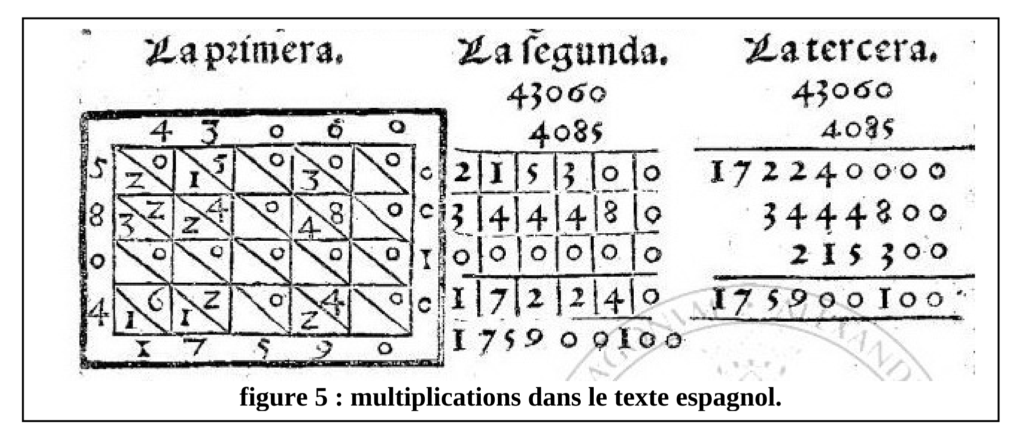
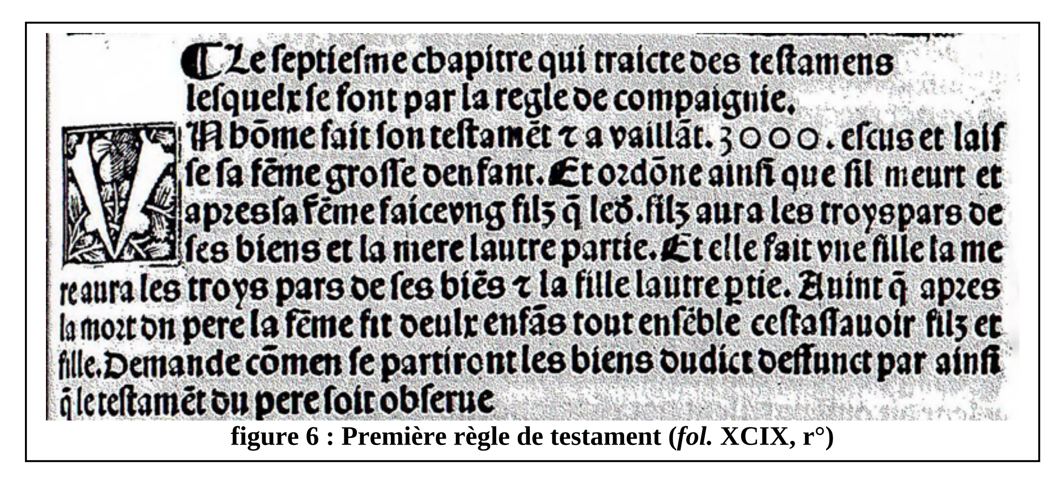


figure 5 : multiplications dans le texte espagnol.

En tout cas, cette première activité, si elle a dérouté la plupart des élèves au début, n’en a pas moins été un succès ; cela nous encourage toujours à poursuivre l’expérience, non ? C’est pourquoi je leur ai proposé un second extrait,[10] en Devoir à la Maison, mais avec une préparation en module, car la première activité n’était pas suffisante pour que la plupart des élèves se sentent à l’aise en autonomie face au texte (c’est d’ailleurs une technique que j’utilise de plus en plus fréquemment, afin que mes élèves aient moins la tentation de tout simplement recopier leur devoir sur celui du premier âne venu.)

2. *Seconde activité (Devoir à la Maison, préparé en classe) : Règles de testaments*



¶ Le septiesme chapitre qui traicte des testamens lesquelx se font par la regle de compaignie.
Vn hōme fait son testamēt & a vaillāt. 3000. escus et laisse sa fēme grosse denfant. Et ordōne ainsi que sil meurt et apres sa fēme faice vng filz q̄ led. filz aura les troys pars de ses biens et la mere lautre partie. Et elle fait vne fille la mere aura les troys pars de ses biēs & la fille lautre ptie. Auint q̄ apres la mort du pere la fēme fit deulx enfās tout ensēble cestassauoir filz et fille. Demande cōmen se partiront les biens dudict deffunct par ainsi q̄ le testamēt du pere soit obserue

figure 6 : Première règle de testament (*fol.* XCIX, r°)

[9] Voir la 3e note de la première page de cet article ; l’illustration dont il est question se trouve à la 50e vue, au *fol.* 24 v°.
[10] *Fol.* 99, r°.

Une traduction en français « moderne » est nécessaire, c'est l'objet de la première question du devoir, traitée en classe oralement (les mots difficiles sont expliqués au préalable, quelques élèves donnent leur version). Comme les lecteurs ne sont pas forcément habitués à la lecture de ce genre de texte, une transcription suit :

Le septième chapitre qui traite des testaments, lesquels se font par la règle de compagnie.
Un homme fait son testament, il possède 3000 *écus vaillant et laisse sa femme enceinte*[11]*. Il ordonne que s'il meurt et que sa femme enfante un fils, alors le fils aura les trois quarts de ses biens et sa femme un quart. Et [si] elle fait une fille, ce sera le contraire. Il advient qu'après la mort du père, sa femme donne naissance à deux enfants, un garçon et une fille. On demande comment seront répartis les biens du défunt afin que le testament soit observé [respecté].*

La réponse fournie par Ortega est étonnante pour les élèves car elle ne contient pas la résolution algébrique familière qu'ils attendaient[12].

Tu feras ainsi : commence avec la fille car la fille a une partie. La mère doit avoir trois parts, donc pose 1 *pour la fille et trois pour la mère. Le fils doit avoir trois fois autant que la mère et seront* 9*. Ores, ajoute ces trois sommes c'est à savoir* 1, 3, 9 *& font* 13 *pour partiteur. Ores, tu diras par la règle de trois : si* 13 *me donnent* 3000*, que me donneront* 9 *? Multiplie et partis ainsi que la règle de trois le requiert & tu trouveras* 230 *écus &* $\frac{10}{13}$*, qui est la part de la fille. Et la mère* 692 *écus et* $\frac{4}{13}$*, et il revient au fils* 2076 *écus et* $\frac{12}{13}$ *d'écus.*

Il s'agit de partages proportionnels, que les élèves ont déjà rencontrés dans leur scolarité, mais dont ils ne se souviennent que rarement, du moins n'ont-ils pas l'idée de mettre en rapport cette connaissance contemporaine avec le problème ancien. Au fond, et quelques élèves proposent immédiatement cette interprétation, il s'agit d'exprimer la part de chacun en fonction de la plus petite ; mais on peut également comparer la technique d'Ortega à celle qu'on utiliserait de nos jours : lors de la séance de module, j'ai demandé à chaque groupe d'effectuer la mise en équation du problème, puis de le résoudre « à la moderne » ; inspirés par le texte, certains ont proposé de nommer x la part la plus petite, la moyenne étant alors $3x$ et la plus grande $3\times3x$, soit $9x$. Le problème s'écrit donc : $x + 3x + 9x = 3000$, et la résolution ressemble fort à ce qui est fait dans le texte original, car on obtient la plus petite part en divisant 3000 par 13. L'explication de la méthode est l'objet de la deuxième question du devoir (« Résumez la solution et expliquez la méthode »). Mes expressions doivent être ambiguës, car la plupart des élèves refont le coup de la traduction mot-à-mot, sans se pencher sur le fond (partage proportionnel, ou division par la somme des coefficients) ; d'autre part, aucun d'entre eux n'a jugé utile d'expliquer la forme des résultats obtenus (j'avais pourtant présenté la *Disme* de Simon Stevin et précisé ce en quoi il s'agissait d'un texte révolutionnaire). Ce qui sera fait d'une autre façon à la troisième question.

Troisième question : est-ce vrai ou faux ? De même que pour la question précédente, très peu d'entre les élèves de seconde prennent cette question à un niveau général, malgré la comparaison, évoquée ci-dessus, entre la méthode arithmétique et la méthode algébrique. Il faut dire que la fin de l'extrait proposé est une vérification : *Et pour veoir si tu as bien fait, adjouste les 3 sommes ensembles et feront* 3000 *escus*. Une illustration est même donnée en gravure (figure 7 ci-après), qui induit peut-être l'idée de s'en tenir à cette simple vérification ? C'est également ici que certains pensent utile de justifier l'utilisation des fractions, puisque la disposition de la somme les mène à ajouter ensemble ces parties fractionnaires pour obtenir finalement 26 treizièmes d'écu, soit 2 écus, ce qui donne un compte « rond », et c'est gagné !

[11] Je vous laisse imaginer les réactions d'élèves, à la lecture de « femme grosse » ; il faut leur rappeler que le mot *grossesse* existe toujours… Ce qui est étonnant, c'est le manque de réaction, même des filles, à l'injustice sexiste dont sont victime l'épouse et la fille.
[12] Le formalisme littéral arrivera à la fin du 16e siècle, en particulier chez Viète.

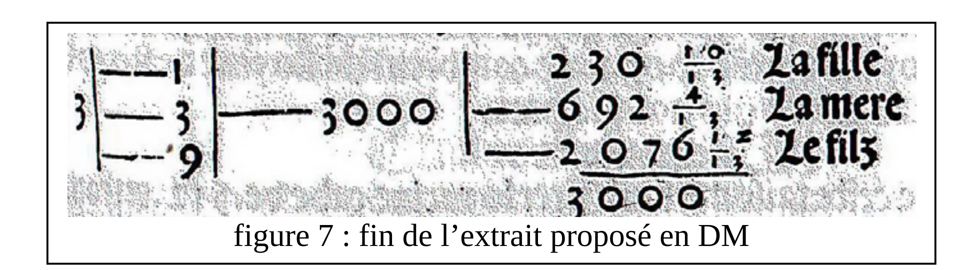


figure 7 : fin de l’extrait proposé en DM

J’étais sûrement un peu optimiste… Mais quelques bons élèves semblent néanmoins avoir bien accroché à l’activité et se sont hissés (le pluriel masculin est commode mais trompeur, car je dois l’avouer, ce sont essentiellement des filles) à un niveau plus général. La correction repose plutôt sur l’aspect rédactionnel des devoir, car beaucoup de ces jeunes gens semblent n’en avoir jamais vraiment fait par eux-mêmes et n’ont aucune idée de la manière de les présenter, ou de rédiger avec soin. Cependant, pour insister sur le côté superficiel des réponses données (qui se limitent parfois à de simples calculs sans texte), je présente la méthode de simple fausse position, telle qu’on en trouve dans de nombreux autres ouvrages de la même époque : poser arbitrairement un certain nombre (la *fausse position*, souvent prise égale à 1), lui appliquer les opérations indiquées par le problème, obtenir comme résultat une valeur différente de la donnée initiale, puis trouver la « vraie » solution par une règle de trois appliquée à la fausse position.[13] Je précise que cette méthode s’applique à des problèmes linéaires (du premier degré sans constante), et que pour les problèmes « affines », il faut utiliser la double fausse position, que nous n’étudierons pas.

Mais les élèves les plus motivés (car il y en a) veulent en savoir plus et demandent des exemples issus du livre d’Ortega. Rien de plus facile, puisque j’ai préparé un diaporama de correction et que j’ai sous la main de nombreux extraits scannés du texte. Mais les élèves vont s’y casser les dents…

3. *Troisième activité : méthode de fausse position.*

Effectivement, c’est là que l’on s’amuse car le texte devient franchement désagréable, surtout pour le professeur, qui n’y avait pas compris pas grand’ chose au premier abord… Et pas question de chercher un éclairage dans le texte en espagnol, aussi obscur que celui-ci[14]

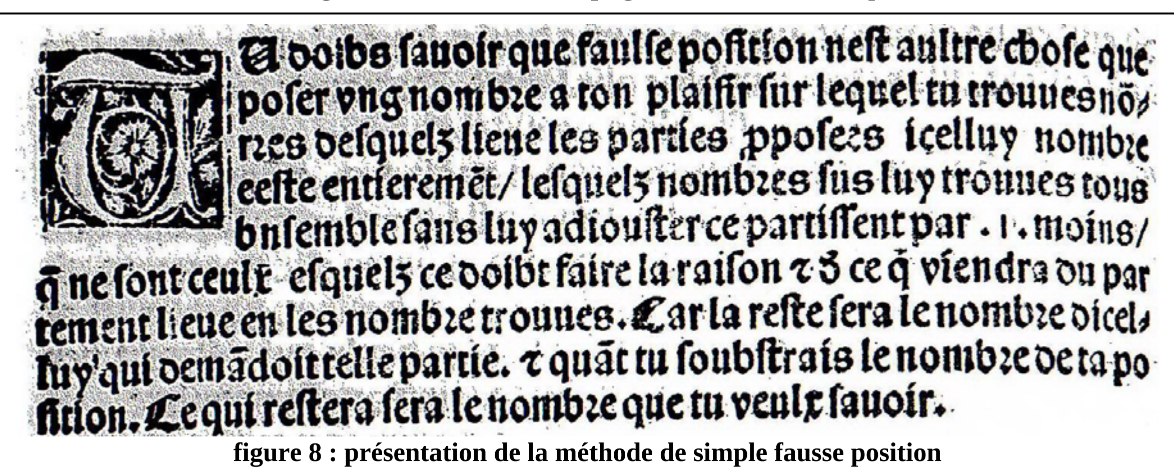

Tu doibs savoir que faulse position nest aultre chose que
poser vng nombre a ton plaisir sur lequel tu trouues nõ-
bres desquelz lieue les parties ꝑposees icelluy nombre
ceste entieremẽt/ lesquelz nombres sus luy trouues tous
ensemble sans luy adiouster ce partissent par .1. moins/
q̃ ne sont ceulx esquelz ce doibt faire la raison ⁊ 3 ce q̃ viendra du par-
tement lieue en les nombre trouues. Car la reste sera le nombre dicel-
luy qui demãdoit telle partie. ⁊ quãt tu soubstrais le nombre de ta po-
sition. Ce qui restera sera le nombre que tu veulx savoir.

figure 8 : présentation de la méthode de simple fausse position

Le début de l’explication répond à la définition courant de la méthode de fausse position : on part d’une valeur arbitraire pour la solution requise, mais en principe la simple utilisation d’une règle de trois permet de trouver la valeur exacte. Si l’on cherche à traduire la prose d’Ortega en

[13] Pour plus de précisions, on consultera la récente brochure de l’IREM de Toulouse « De l’arithmétique à l’algèbre, fausses positions et premier degré », Toulouse, 2008.
[14] *Fol.* 160 v°, paginé par erreur 601, vue n° 307.

termes quasi-compréhensibles, il faut d'abord remarquer que la méthode est appliquée à une certaine catégorie de problèmes, à propos de sommes d'argent possédées par plusieurs personnes (une compagnie) et que l'énoncé donne systématiquement la proportion de l'argent des autres qu'il manque à chacun pour acquérir un certain bien ; pour résoudre cette catégorie de problèmes, il s'agit de choisir la position de départ, de trouver des nombres dont on doit soustraire les proportions données, et de diviser la somme des ces nombres par la quantité de personnes moins un. En soustrayant le résultat des nombres de départ, on doit trouver les résultats… Bon courage !

Une difficulté supplémentaire provient d'un problème typographique que je n'avais pas décelé à la première lecture : à la troisième ligne, il est question d'un nombre qui *eeste* complètement. Comme le verbe *ester* existe toujours en français, il était plausible de croire à une autre acception ancienne inusitée aujourd'hui. Mais quel rapport avec la justice ? La réponse m'est venue en plein TD, en regardant l'extrait projeté au tableau : il faut prendre en considération les premiers mots des lignes 2, 3 et 4, dont les premiers caractères ont été intervertis. Ainsi *no[m]/**b**res* donne-t-il *no[m]/**r**res*, ***r**este* devient ***e**este* et ***e**nsemble* est remplacé par **b***nsemble*, marrant, non ?

Mais cela ne nous avance guère dans l'intelligence de la méthode. Comme souvent dans la lecture d'ouvrages originaux, pour comprendre ce prologue il va falloir se reporter à l'exemple qui suit, ou aux quelques exemples qui suivent.[15]

Exemple 1 : *Trois hommes veulent acheter un cheval & le cheval coûte tant.*

Exemple de adiouster.

Troys hõmes veullent acheter vng cheual ⁊ le cheual couste tant. ⁊ chescun deult a tant dargẽt que nul des. 3. marchãs ne le peult acheter a par soy. Mais le pmier dit aux aultres. 2. ql luy baillẽt la moytie de leur argent. auecques le sien il aura assez pour acheter ledict cheual. Et le second dit aux aultres. 2. quil luy baillent la tierce partie de leur argẽt/ ⁊ auecques le sien il aura assez pour acheter ledict cheual. Et le tiers dit aux aultres. 2. quil luy baillent le quart de leur argent/ ⁊ auecques le sien il aura assez argent pour acheter ledict cheual. Demande combien chescun desdictz marchãs auoit dargent/ ⁊ combien valloit ledict cheual.

Vous comprenez mieux ? N'ayez pas honte de répondre par la négative et pensez aux pauvres élèves qui avaient voulu en savoir davantage. Il s'agit d'un problème assez classique dont on retrouve diverses versions à travers l'histoire et jusque dans les colles des journaux pour enfants : une marchandise (ici, le mot est mal choisi puisqu'il s'agit d'un cheval) coûte un certain prix et aucune des trois personnes présentes n'a suffisamment d'argent pour l'acheter. Mais chacune d'entre elles n'a besoin que d'une portion de ce que possèdent les autres (la moitié pour le premier, le tiers pour le second et le quart pour le troisième) pour pouvoir acquérir le bien.

[15] Les encouragements de Jean Terreran et une explication qu'il avait donnée d'une partie du problème ont été essentiels pour moi. Merci, Jean !

« Traduction » de la méthode d'Ortega :

Si l'on appelle a, b et c les sommes que possèdent respectivement les premier, second et troisième marchands et X le prix du cheval, on peut transcrire la méthode de la manière suivante (bizarrement, la fausse position choisie n'est pas une des quantités recherchées, mais elle correspond au montant total d'argent disponible après l'achat.)

On cherche une fausse position A divisible par 2, 3 et 4 : on prend A = 12k (ici k = 1, donc A = 12)

Calcul pour le 1er marchand : A + $\frac{1}{1}$A = 2A = 24k (soit 24).

Calcul pour le 2e marchand : A + $\frac{1}{2}$A = 12k+ 6k = 18k (soit 18).

Calcul pour le 3e marchand : A + $\frac{1}{3}$A = 12k+ 4k = 16k (soit 16).

La somme des ces trois quantités est 24k + 18k + 16k = 58k, que l'on divise par le nombre de marchands moins 1 : 58k ÷2 = 29k.
Le prix du cheval est la différence entre ce résultat et la position A : 29k - 12k = 17k, ici : 17.
La somme que possède chaque marchand est la différence entre le même résultat et celui de chacun des calculs initiaux : 1er : 29k - 24k = 5k (c'est-à-dire 5) ; 2e : 29k - 18k = 11k (c'est-à-dire 11) ;3e : 29k - 16k = 13k (c'est-à-dire 13) ; on obtient donc 5, 11 et 13, dont la somme est égale à 29.

Cela fonctionne, mais pourquoi ? (Ma question favorite aux élèves, leur hantise.)

Une explication possible :

Outre les notations ci-dessus, on appelle S la somme totale disponible ($S = a + b + c > X$). On a : $X = a + \frac{1}{2}(b+c) = S - \frac{1}{2}(b+c)$, donc $S - X = \frac{1}{2}(b+c)$; de même, comme $X = b + \frac{1}{3}(a+c)$ et $X = c + \frac{1}{4}(a+b)$, on obtient successivement $S - X = \frac{2}{3}(a+c)$ et $S - X = \frac{3}{4}(a+b)$. On remarque que ces fractions sont de la forme $\frac{n}{n+1}$. Or la propriété fondamentale de ce type de fractions est : $\forall n \in N, \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = 1$, autrement dit il suffit d'ajouter sa ne partie à une telle fraction pour obtenir 1 ; c'est ce qui est utilisé ici dans les calculs pour chacun des marchands et il est aisé de comprendre que la fausse position A de départ est la différence entre le prix de la bête et la somme totale disponible : $S - X = A = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{3}{4}(a+b)$

On a alors : 1er marchand : $A + \frac{1}{1}A = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b+c) = (b+c) = S - a$

2e marchand : $A + \frac{1}{2}A = \frac{2}{3}(a+c) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}(a+c) + \frac{1}{3}(a+c) = S - b$

3e marchand : $A + \frac{1}{3}A = \frac{3}{4}(a+b) + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}(a+b) = \frac{3}{4}(a+b) + \frac{1}{4}(a+b) = S - c$

Il en découle que la somme de ces trois quantités est bien le double du montant total de l'argent disponible : $b + c + a + c + a + b = 2 \times (a+b+c) = 2S$, ou $S - a + S - b + S - c = 3S - (a+b+c) = 2S$. Le prix du cheval est $X = S - A$; le bien de chaque marchand est donné par la différence entre S et le résultat de chaque calcul respectivement : $S - (S - a)$, $S - (S - b)$ et $S - (S - c)$.

De quoi réfléchir, n'est-ce pas ? Un autre exemple permettra de consolider l'acquisition.

Exemple 3 : *Quatre hommes veulent acheter un cheval comme dessus.*

Le problème est du même tonneau, avec quatre personnes, comme il est dit dans l'énoncé. Cette fois-ci les proportions sont : moitié, tiers, quart et cinquième.

La traduction de la méthode utilisée est fort semblable à celle de l'exemple 1 : Si l'on

appelle *a*, *b*, *c* et *d* les sommes que possèdent respectivement les premier, second et troisième marchands et X le prix du cheval, on peut transcrire la méthode de la manière suivante :

La fausse position est $A \in (\text{ppcm}(2 ; 3 ; 4 ; 5))\mathbf{N}$, *i.e.* $A \in 60\mathbf{N}$: on prend $A = 60k$ ($A = 60$, $k = 1$)

Calcul pour le 1[er] marchand : $A + \frac{1}{1}A = 2A = 120k$ (soit 120).

Calcul pour le 2[e] marchand : $A + \frac{1}{2}A = 60k + 30k = 90k$ (soit 90).

Calcul pour le 3[e] marchand : $A + \frac{1}{3}A = 60k + 20k = 80k$ (soit 80).

Calcul pour le 4[e] marchand : $A + \frac{1}{4}A = 60k + 15k = 75k$ (soit 75).

La somme des ces quantités est $120k + 90k + 80k + 75k = 365k$, que l'on divise par le nombre de marchands moins 1 : $365k \div 3 = (121 + \frac{2}{3})k$.

Le prix du cheval est la différence entre ce résultat et la position A : $(121 + \frac{2}{3})k - 120k = (61 + \frac{2}{3})k$, soit, avec $k = 1$; $61 + \frac{2}{3}$.

La somme que possède chaque marchand est la différence entre le même résultat et celui de chacun des calculs initiaux (que je laisse au lecteur en exercice.)

Exemples suivants et conclusion

Ils sont cinq hommes qui veulent acheter une pièce de drap... (moitié, tiers, quart, cinquième et sixième ; fausse position : 60.)

Troys marchans veullent acheter une pièce de vellours… (tiers, quart et cinquième, fausse position : 60 aussi, quel succès !)

Et ainsi de suite…

L'explication de ces problèmes est assez difficilement passée, je dois l'avouer. Bien peu d'élèves ont pu la suivre jusqu'au bout, mais il faut convenir que c'était assez difficile. D'ailleurs, sans leur sollicitation, je n'aurais sans doute pas essayé de leur proposer ce texte-là (des Terminales auraient peut-être pu en tirer parti, mais en ce qui concerne les Secondes, le manque de familiarité avec l'algèbre est un obstacle, ainsi que le manque de désir d'aller au bout de la solution). Certains d'entre eux l'ont pris pour un « délire de prof de maths », attendant poliment la fin de l'heure et oubliant immédiatement ces mauvais souvenirs. Je ne tenais pas à insister, car ils en auraient conçu une vision négative des activités de lecture de textes anciens (trop ardus), voire des mathématiques en général. Les plus intéressés ont convenu qu'ils avaient besoin de plus de temps pour tirer parti de l'activité et nous nous sommes quittés bons amis. L'extrait donné en interrogation la semaine suivante (problème de la lance plantée en terre, résolu par fausse position simple) revenait à nos premières amours.

Un des aspects regrettables des activités de lecture de textes anciens en classe est de ne trouver de véritable écho qu'auprès de bons élèves lorsque la compréhension des textes n'est pas immédiate et nécessite un travail d'élaboration. Pierre Collaudin avait exprimé cette idée après avoir travaillé avec ses élèves de Terminale sur des quadratures d'Archimède, sujet difficile mais combien exaltant pour qui cherche à sortir des sentiers battus ! Le défi reste lancé : comment faire en sorte d'impliquer tous les élèves dans des sujets d'étude qui dépassent la simple application de recettes ? Comment susciter chez eux l'intérêt pour des aspects difficiles de la discipline et le désir d'approfondir ? Une carrière entière (même si sa durée a tendance à s'allonger en ce moment) suffira-t-elle pour tenter de relever ce défi ?

I. Auteur(s)

Patrick GUYOT – David MAGNIEN - Frédéric MÉTIN – Marie–Noëlle RACINE
Philippe REGNARD – Jean TERRERAN

II. Titre(s)

MÉLANGES EN HOMMAGE À PIERRE COLLAUDIN

III. Caractéristiques de l'édition

Edité par l'IREM de DIJON en 2008
Format A4 – 85 pages

IV. Types de documents et supports

Ouvrage papier

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

Ordinateur – Géoplan – Cabri;

VI. Public visé

Tous enseignants de mathématiques, sciences, histoire et philosophie.

VII. Contenu

Recueil d'activités réalisées en classe et inspirées des travaux de Pierre Collaudin concernant Archimède, l'arithmétique, la géométrie tant pure que pratique.

Mots clés :
Archimède (- 287 ; - 212) ; Etienne Bézout (1730 ; 1783) ; Samuel Marolois (1572 ; vers 1628) ; François Blondel (1618 ; 1686) ; Juan de Ortega (1480 ; 1568);

Nombres entiers ; Puissances de 10 ; Arénaire ; Infini ; Myriades ; Numération ; Grands nombres ; Proportionnalité ; Règle des mélanges ; Règle des alliages ; Produit en croix ; Règle de trois ; Mathématiques médiévales ; Arithmétique commerciale ; Équations diophantiennes ; Équations à deux inconnues ; Congruences ; Restes des divisions ; Algorithme d'Euclide

Géométrie ; Angles ; Maxima et minima ; Point particulier ; Point de Fermat ; Point de Torricelli ; Théorème de Viviani ; Triangle ; Carré ; Triangle équilatéral ; Triangle inscrit dans un carré ; Construction géométrique ; Démonstration ;

Baccalauréat professionnel ; Classe de cinquième ; Classe de seconde ; Classe de Première L ; Classe de Terminale S spécialité maths ;

Travail en autonomie ; Méthode par essais et erreurs ; Problèmes ouverts ; TICE ; Géoplan.

Prix :

ISBN : 2–913135–61–7 **EAN : 9782913135611**

Directeur de la publication : Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM
Mise en page : Françoise BESSE
Dépôt légal : n° 186 – 2ème semestre 2008